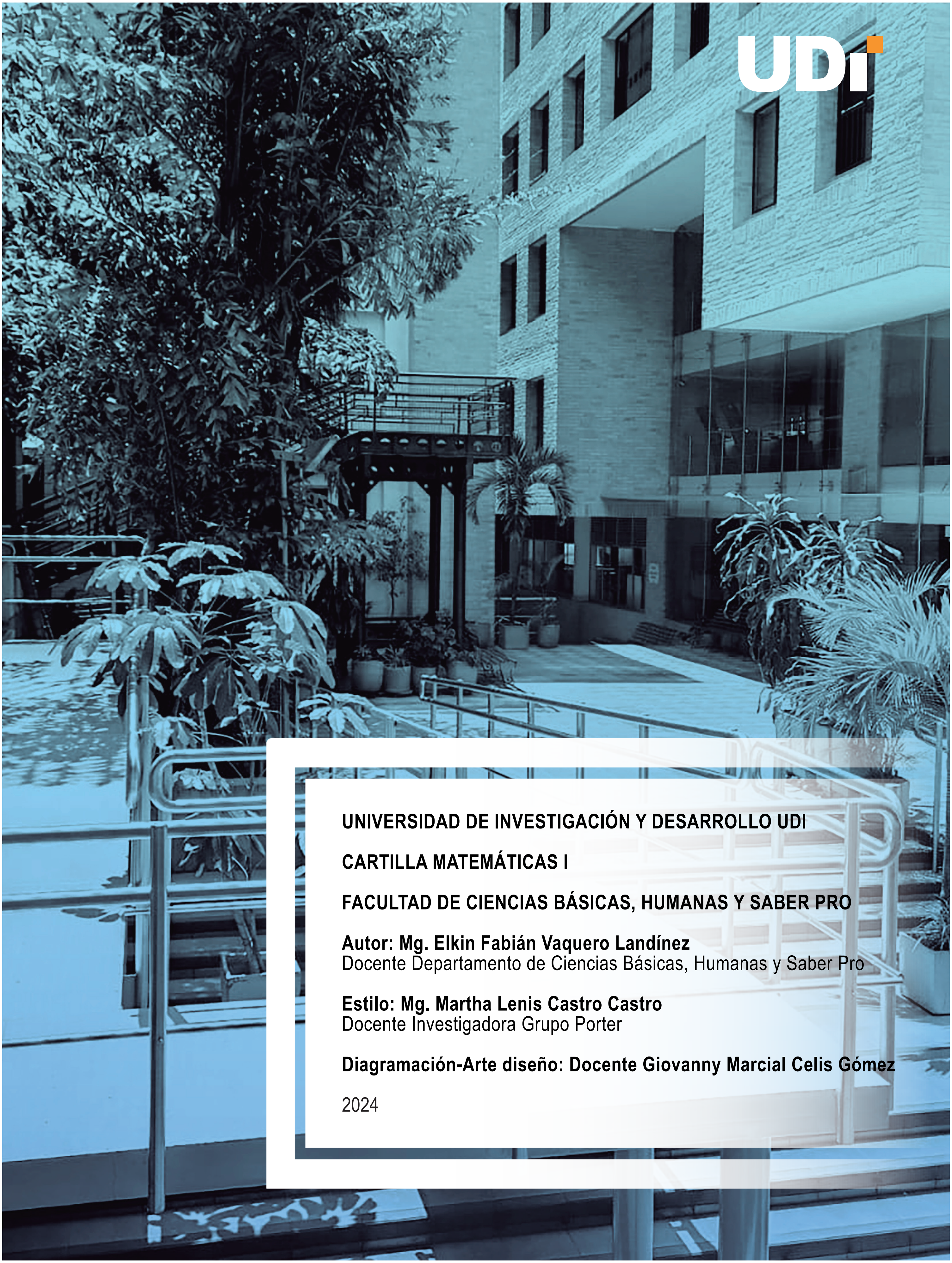
UDI UNIVERSIDAD DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO

MATEMÁTICAS I

COLECCIÓN DIGITAL
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS, HUMANAS Y SABER PRO
2024

www.udi.edu.co



UNIVERSIDAD DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO UDI

CARTILLA MATEMÁTICAS I

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS, HUMANAS Y SABER PRO

Autor: Mg. Elkin Fabián Vaquero Landínez
Docente Departamento de Ciencias Básicas, Humanas y Saber Pro

Estilo: Mg. Martha Lenis Castro Castro
Docente Investigadora Grupo Porter

Diagramación-Arte diseño: Docente Giovanny Marcial Celis Gómez

2024

JAIRO CASTRO CASTRO
Presidente Institucional

JAIRO AUGUSTO CASTRO CASTRO
Rector

NÉSTOR RODRÍGUEZ SUÁREZ
Vicerrector Académico

GARETH BARRERA SANABRIA
Director de Investigaciones

JUAN CARLOS YEPES PATIÑO
Vicerrector Administrativo y Financiero

MARTHA LENIS CASTRO CASTRO
Vicerrectora General

ARMANDO ARÉVALO MURILLO
Director de Innovación y
Desarrollo Tecnológico

REYNALDO ALONSO ESTEVEZ LIZARAZO
Director Dpto. Ciencias Básicas
Humanas y Saber Pro

CÉSAR DUBIER CASTRO HERNÁNDEZ
Director Instituto de Lenguas

LEIDY ARCINIEGAS MILLÁN
Directora de Planeación

CARLOS ANDRÉS MALDONADO SANABRIA
Director Oficina Autoevaluación
Registro Calificado y Acreditación

GLADYS CORREDOR VILLAMÍL
Representante Docentes
Consejo Directivo

ALBA JANETH MUÑÓZ RODRÍGUEZ
Representante Docentes
Consejo Académico

JOSÉ ARMANDO VILLALBA QUÍNTERO
Representante Estudiantes
Consejo Directivo

LEONARDO ANDRÉS ÁLVAREZ GARCÉS
Representante Estudiantes
Consejo Académico

NELSY MARCELA CARREÑO ESTUPIÑÁN
Representante Egresados
Consejo Directivo

YENNY CAROLINA VILLAMIZAR MONTOYA
Representante Egresados
Consejo Académico

ISBN: 978-958-8796-27-7

CONTENIDO

CONTENIDO

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

El cuerpo docente del Departamento de Ciencias Básicas y Humanas de la Universidad de Investigación y Desarrollo – UDI, presenta la cartilla de Matemáticas I, la cual hace parte de la Colección de materiales creados por docentes e investigadores adscritos al departamento, junto con profesionales de otras disciplinas y modalidades, los cuales como producto de las actividades acordadas para el desarrollo de Funciones Sustantivas (Docencia – Investigación y Extensión), han generado una serie de cartillas, videos, MOOC (Cursos abiertos), RED (Recursos Educativos Digitales) y talleres, como material de apoyo para los estudiantes de la UDI y la comunidad académica en general, que soportan la formación en esta área.

La cartilla presenta cinco unidades que desarrollan las siguientes temáticas:

- **Unidad 1: Conceptos previos.** Esta unidad sirve como base fundamental, ya que introduce los conceptos básicos de las matemáticas, que se necesitan comprender antes de abordar temas más avanzados.

- **Unidad 2. Funciones.** En esta unidad se profundiza el estudio de las funciones de variable real. Se analizará cómo las funciones son herramientas fundamentales en matemáticas y en la resolución de problemas en diversos campos, desde la física hasta la economía. Además, enfatiza la importancia de comprender las propiedades y características de las funciones para resolver problemas reales.

- **Unidad 3. Límites y continuidad.** Esta unidad se adentra en conceptos avanzados, como los límites y la continuidad de las funciones. En concordancia, explica cómo los límites permiten describir el comportamiento de una función cuando se acerca a un valor específico y, cómo la continuidad es fundamental para garantizar que una función sea suave y sin interrupciones.

- **Unidad 4: Derivada.** La derivada es uno de los conceptos más importantes en cálculo y matemáticas en general. En esta unidad, el propósito es que se aprenda a calcular derivadas y comprender su significado geométrico como la tasa de cambio instantáneo. Es posible analizar cómo las derivadas se utilizan en la modelización de fenómenos del mundo real, como la velocidad y la aceleración en física, y cómo son esenciales en la optimización y la resolución de problemas.

- **Unidad 5: Aplicaciones de la derivada.** En esta última unidad se exploran aplicaciones concretas de las derivadas. Aquí veremos cómo las derivadas se utilizan para resolver problemas de optimización en economía, ingeniería y ciencias naturales. También se destaca cómo este conocimiento es relevante en la toma de decisiones informadas en la vida cotidiana.

Dichas unidades apuntan a las competencias específicas del curso, de acuerdo a las rutas de aprendizaje, así:

- Identifica las funciones, sus elementos y sus gráficas para dar solución a problemas matemáticos en diversos contextos.

- Modela situaciones problémicas utilizando los diferentes tipos de funciones para la resolución de problemas en su entorno académico.

- Aplica los teoremas, axiomas y principios matemáticos relacionados con la derivación, razón de cambio, reglas y criterios de derivación para ser aplicados en situaciones reales en su entorno profesional.

Este material se convierte en una revisión de uno de los cursos más relevantes de la actualidad en el campo de las ciencias exactas, y brinda al educando la posibilidad de conocer y comparar, desde diferentes perspectivas, la complejidad de las diferentes temáticas que se abordan en este curso.

Elkin Fabián Vaquero Landinez
Docente Departamento de Ciencias Básicas, Humanas y Saber Pro

SABERES

SABERES CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
◈ Comprende el concepto de función y sus elementos tales como: dominio, rango y grafica de función.	◈ Aplica las operaciones con funciones y función inversa en la resolución de los ejercicios propuestos.	◈ Demuestra orden y claridad en el desarrollo de los ejercicios propuestos en las evidencias.
◈ Identifica los diferentes tipos de funciones de acuerdo con sus propiedades geométricas, numéricas y analíticas.	◈ Resuelve los ejercicios teniendo en cuenta las nociones de límite, continuidad y derivada.	◈ Explica el procedimiento desarrollado considerando los conceptos vistos en clase.
◈ Argumenta los procedimientos aplicados en la resolución de los ejercicios propuestos para validar los dominios conceptuales y procedimentales de los mismos.	◈ Calcula la derivada de una función mediante el uso de la definición formal de derivada y las reglas de derivación de función.	◈ Realiza tareas de asignaciones con responsabilidad, honestidad, compromiso y puntualidad.
◈ Comprende las nociones de razón de cambio, máximos y mínimos, criterio de la primera y segunda derivada para la solución de los ejercicios propuestos.	◈ Resuelve los problemas de optimización planteados en las evidencias.	

INTRODUCCIÓN

Damos la bienvenida a la Cartilla Matemáticas I de la Universidad de Investigación y Desarrollo -UDI. Una herramienta fundamental en el viaje educativo que guiará hacia el dominio de conceptos matemáticos cruciales y su aplicación en diversas áreas de las ciencias.

El curso académico Matemáticas I se basa en el aprendizaje de la derivación y su profunda aplicación en los campos de las ciencias, estableciendo modelos que permitirán interpretar, comprender y comparar fenómenos físicos, sociales y académicos. En su núcleo, este curso proporcionará las habilidades y herramientas necesarias para explorar y explicar el mundo que nos rodea.

Estructurado en cinco (5) unidades, este curso abarca desde la conceptualización de la expresión fundamental del Cálculo hasta la aplicación de la derivada de funciones en la resolución de problemas que se encuentra en el quehacer profesional. Cada unidad está cuidadosamente diseñada para desarrollar las competencias específicas necesarias para tener éxito en este viaje matemático.

La invitación es a sumergirse en el intrigante mundo de las matemáticas y a descubrir cómo estas disciplinas se convierten en una herramienta poderosa para interpretar la realidad y resolver desafíos en diversos contextos. A lo largo de esta cartilla, podrá explorarse desde los conceptos básicos de la matemática, hasta las aplicaciones prácticas de la derivada, enriqueciendo la capacidad de análisis y resolución de problemas.

Esta cartilla es una puerta hacia el conocimiento y la destreza matemática que buscará preparar al estudiantado para afrontar desafíos futuros con confianza y habilidades que trascienden las aulas.

1. UNIDAD 1. CONCEPTOS PREVIOS

Las expresiones algebraicas son el lenguaje de las matemáticas, y su comprensión es esencial para el progreso en el ámbito académico y profesional. Aquí se introduce a las expresiones algebraicas y las operaciones fundamentales con ellas. Estas habilidades son esenciales para representar y resolver problemas del mundo real en términos matemáticos. La capacidad de reconocer, clasificar y manipular expresiones algebraicas es un primer paso crucial hacia la resolución de problemas complejos en áreas como la física, la economía y la ingeniería.

La factorización es una técnica poderosa que permite simplificar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones. Por tanto, es importante comprender cómo descomponer expresiones algebraicas en factores más simples, lo que es esencial en la simplificación y resolución de problemas matemáticos avanzados. La factorización también se utiliza en la optimización y en la resolución de ecuaciones cuadráticas, que son fundamentales en una variedad de disciplinas.

Las desigualdades son herramientas clave en la modelización de situaciones en la vida real, como la toma de decisiones financieras o la resolución de problemas de programación lineal. En ese sentido, comprender y resolver inecuaciones, es esencial en la descripción y solución de problemas que involucran relaciones cuantitativas. Además, el concepto de valor absoluto se presenta, lo que es relevante en campos como la física y la estadística.

Esta unidad es de suma importancia debido a su papel fundamental en la preparación para comprender y abordar conceptos más avanzados en el campo de las matemáticas y su aplicación en diversas áreas de las ciencias. Cada uno de los resultados de aprendizaje de esta unidad está diseñado para equipar a los estudiantes con habilidades prácticas y aplicables en su vida cotidiana y futura carrera profesional. La modelización de problemas cotidianos y profesionales a través de expresiones algebraicas y la resolución de desigualdades demuestra la relevancia directa de los conceptos abordados en esta unidad en la toma de decisiones informadas y la resolución de problemas en situaciones del mundo real.

1.1 Expresiones algebraicas y operaciones

En álgebra se emplean letras para representar números. Mediante letras y símbolos matemáticos las proposiciones verbales se reducen a proposiciones algebraicas muy cortas.

Ejemplo: 8 veces un numero restado del mismo número es igual a siete veces dicho número **8k-k=7k**, es decir, 8k equivale a “ocho veces un número”.

Pasar las proposiciones verbales a algebraicas es de suma importancia en la modelación matemática, a continuación, se enuncian algunas palabras que denotan operaciones.

Adición: suma, mas, ganar, aumentar, elevar, expansionar, más que, mayor que, más grande que, agrandar, crecer e incrementar.

Sustracción: diferencia, menos, perder, disminuir, bajar, más bajo que, menos que, menor que, más pequeño que, acortar, depreciar y decrecer

Multiplicación: multiplicado por, veces, producto, dos veces, doble, triple, cuádruple y quíntuplo.

División: divido por, razón, cociente y mitad.

1.1.1 Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de números y letras relacionados con operaciones de suma, resta, multiplicación, división y a veces también por medio de potenciación, radicación, y logaritmación.

$4x^2-2p$; $9m+13n^3-4$; $(a+2ab)^2$; $\sqrt{a^2+b^2}$

Dos o más expresiones algebraicas unidas con un signo + ó – reciben el nombre de **términos**. Dos o más expresiones algebraicas unidas por una multiplicación reciben el nombre de **factores**.

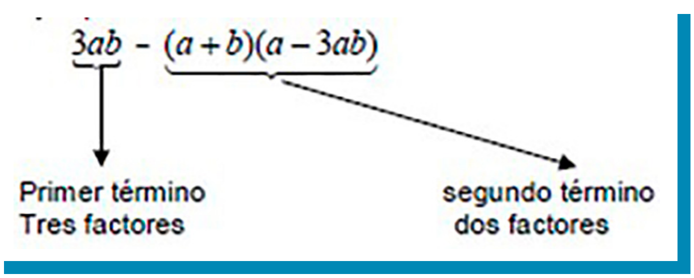
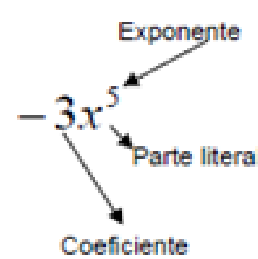


Figura 1 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas

Todo **término** presenta las siguientes partes:
Coeficiente: El que precede a la parte literal.
Parte Literal: Está representada por una o varias letras.
Exponente: Veces que se toma como factor la parte literal.
De acuerdo al número de términos las expresiones algebraicas pueden ser:



De acuerdo al número de términos las expresiones algebraicas pueden ser:

MONOMIO: tiene un término. Ejemplos: $8mn^2$; $(x^2+1)/y$
BINOMIO: tiene dos términos. Ejemplos: $8mn^2+4mn$; $9-5p$
TRINOMIO: tiene tres términos. Ejemplos: $8mn^2+4mn-13$; $9z-5p+w$
POLINOMIO: tiene más de dos términos. Ejemplos: $8mn^2+4mn-13m-1$

> Recuerde que los términos en un polinomio se identifican porque están separados unos de otros por el signo positivo (+) o el negativo (−).

Grado de un término: Es la suma de los exponentes del factor literal. Ejemplo:
En el término $7b^3$ tiene grado 3 (por el exponente de x)
En el término $4ab^3 c$ tiene grado 5 (1+1+3, la suma de los exponentes)

Grado de una expresión: Es el grado mayor de sus distintos términos. Ejemplo:
En la expresión $7b^3-4c^5$ tiene grado 5 (por el grado del segundo término).
En el término $7ab^3 c-4a^4 b^3 c^5$ tiene grado 12 (por el grado del segundo término).

Términos semejantes: Dos términos son semejantes si la variable contiene el mismo exponente, por ejemplo, los términos $13x^3$ y $6x^3$ son semejantes, este concepto se puede extender a términos que tienen más de una variable, veamos un ejemplo: $2x^3 y^2$; $-5x^3 y^2$; $-7x^3 y^2$; $x^3 y^2$ son términos semejantes.

Reducción de términos semejantes. Para reducir términos semejantes se suman los coeficientes numéricos de todos los términos semejantes y a continuación se escribe la parte literal común. Ejemplo:

$$10x^2+5xy-xy^2-12x^2+7xy^2-9xy+1$$
$$=(10-12)x^2+(5-9)xy+(-1+7)xy^2+1$$
$$=-2x^2-4xy+6xy^2+1$$

Se llama **término independiente** a aquel que no contiene parte literal. En el ejemplo anterior, 1 es el término independiente.
Polinomio ordenado: Un polinomio está ordenado con respecto a las potencias crecientes de una de sus letras cuando ésta figura en cada término con un exponente mayor o igual que en el anterior.

1.1.2 Operaciones con expresiones algebraicas

Anteriormente se dijo que, con las expresiones algebraicas, se cumplen las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división. Vamos a trabajar cada operación y aprender un poco más de ellas.

Suma y Resta: En Álgebra, a la hora de efectuar las operaciones de adición y sustracción, es de particular importancia la identificación de los llamados términos semejantes.

- **Cuando son monomios:**

$$-21k^2 + 13j - 5 = -21k^2 + 13j - 5$$

Observa que, como los términos no son semejantes la suma se deja indicada.

- **Cuando son polinomios:**

$$\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{8}x^2 + \frac{2}{5}x\right) - \left(-\frac{1}{10}x + \frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3} + \frac{5}{8}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x - \frac{7}{3}$$

Eliminamos los paréntesis; si los precede un signo positivo, no se afectan los términos, en caso de ser precedido por un signo negativo, los términos cambian de signo.

$$= \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x - \frac{1}{3} - \frac{7}{3}$$

Agrupamos términos semejantes.

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right)x^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\right)x + \left(-\frac{1}{3} - \frac{7}{3}\right)$$

Extraemos la variable con su respectivo exponente como factor dejando los coeficientes dentro del paréntesis. Observe que estos nos indican una suma de fracciones.

$$= \frac{11}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{8}{3}$$

Multiplicación: Para multiplicar expresiones algebraicas, debe tenerse en cuenta los siguientes pasos:

Multiplicar los signos (ley de los signos para la multiplicación).
Multiplicar los coeficientes numéricos.
Multiplicar las letras (multiplicación de potencias de igual base).

Estos pasos son válidos para todos los casos de multiplicación en álgebra; esto es, **monomios por monomios, monomios por polinomios y polinomios por polinomios.** A continuación, ejemplos:

monomios por monomios	monomios por polinomios	polinomios por polinomios
$(-4a^5b^4)\cdot(12ab^2)=$ $\boxed{-48\,a^6b^6}$	$7\,a^4b\cdot(2\,a^3-a\,b+5\,b^3)=$ $\boxed{14\,a^7b-7\,a^5b^2+35\,a^4b^4}$	$(2a-3b)(3a-7b)=$ $6a^2-14ab-9ab+21b^2=$ $\boxed{6a^2-23ab+21b^2}$
$(6\,m^5n^{-3}p^{-4})\cdot(5\,mn^{-1}p^2)=$ $\boxed{30\,m^6n^{-4}p^{-2}}$	$\left(-\frac{2}{5}m^{2a-3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}m^{a-1}+\frac{5}{2}m^{5a}\right)=$ $\boxed{\frac{1}{2}m^{3a-4}-m^{7a-3}}$	$(x-2)(x^2+2x+4)=$ $x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8=$ $\boxed{x^3-8}$
$\left(\frac{3}{4}a^4b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}ab^3\right)=\boxed{\frac{1}{2}a^5b^4}$	$(a\,x+b\,y-c\,z)\cdot(-x\,y)=$ $\boxed{-ax^2y-bxy^2+cxyz}$	$(m^2-2mn-8n^2)(m^3-3m^2+2)=$ ¡Hazlo tú!

Figura 2 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas

División: Dividir polinomios es tan sencillo, como dividir cantidades enteras, sólo que un polinomio es como un grupo de números enteros descompuestos en una adición de muchos sumandos. Los polinomios se disponen como en la división de números y ordenados por sus potencias de mayor a menor. Los términos del cociente se obtienen en varios pasos, parecidos a la división numérica. Sabemos que el proceso de dividir consiste en: dadas dos cantidades "dividendo" y "divisor", se debe buscar otra cantidad llamada "cociente" que multiplicada por el "divisor" nos resulte el "dividendo". Vamos a explicarlo por medio de un ejemplo:

$$\left(3x^2-10x^3+4x^5-x+6\right)\div\left(x^2+1-2x\right)$$

Se ordenan los dos polinomios tomando en cuenta los exponentes de la variable (x) en orden decreciente y completando con coeficiente cero (0) la potencia faltante.	$4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 \;\big\lfloor\; x^2-2x+1$
Se divide el primer término del polinomio dividendo entre el primer término del divisor.	$4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 \;\big\lfloor\; x^2-2x+1$

Para efectuar esto se divide el coeficiente del dividendo entre el del divisor y con la variable se aplica la regla de potencia de un cociente de igual base.	$\begin{array}{l\|l} 4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ & 4x^3 \end{array}$
Se multiplica el primer término del cociente por todos los términos del divisor, a estos productos se les cambia el signo y se ordenan debajo del dividendo según el exponente de la variable.	$\begin{array}{l\|l} 4x^5+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ -4x^5+8x^4-4x^3 & 4x^3 \end{array}$
Estos productos se restan del dividendo.	$\begin{array}{l\|l} \cancel{4x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ \underline{-\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3} & 4x^3 \\ \quad 8x^4-14x^3+3x^2-x+6 & \end{array}$
Se repite todo el procedimiento considerando que ahora el primer término del nuevo dividendo es $8x^4$.	$\begin{array}{l\|l} \cancel{4x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & \underline{x^2-2x+1} \\ \underline{-\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3} & 4x^3+8x^2 \\ \quad \cancel{8x^4}-14x^3+3x^2-x+6 & \\ \quad \underline{-\cancel{8x^4}+16x^3-8x^2} & \\ \qquad 2x^3-5x^2-x+6 & \end{array}$
Continuamos ahora dividiendo los demás términos.	$\begin{array}{l\|l} \cancel{4x^5}+0x^4-10x^3+3x^2-x+6 & x^2-2x+1 \\ \underline{-\cancel{4x^5}+8x^4-4x^3} & 4x^3+8x^2+2x-1 \\ \quad \cancel{8x^4}-14x^3+3x^2-x+6 & \\ \quad \underline{-\cancel{8x^4}+16x^3-8x^2} & \\ \qquad \cancel{2x^3}-5x^2-x+6 & \\ \qquad \underline{-\cancel{2x^3}+4x^2-2x} & \\ \qquad\quad -\cancel{x^2}-3x+6 & \\ \qquad\quad \underline{\cancel{x^2}-2x+1} & \\ \qquad\qquad -5x+7 & \end{array}$

Tabla 1 Elaborado por Autores Elkin Vaquero.

El cociente de la división es $4x^3+8x^2+2x-1$ y el residuo es $-5x+7$. Como el grado de este residuo es inferior al del divisor, no se puede continuar dividiendo por lo que la división es inexacta.

1.1.3 Valor numérico de expresiones algebraicas

Valorar una expresión algebraica significa asignar un valor numérico a cada variable de los términos y resolver las operaciones indicadas en la expresión para determinar su valor final.
En consecuencia, los pasos a seguir para determinar el valor numérico de una expresión algebraica es el siguiente:

- Reemplazar cada variable por el valor asignado.
- Calcular las potencias indicadas.
- Efectuar las multiplicaciones y divisiones.
- Realizar las adiciones y sustracciones.

Veamos un ejemplo:
Hallar el valor numérico de la expresión $5x^2 y-8xy^2-9y^3$ considerando $x=2$; $y=-1$; por tanto:

$$\begin{aligned} 5x^2y-8xy^2-9y^3 &= 5(2)^2(-1)-8(2)(-1)^2-9(-1)^3 \\ &= 5(4)(-1)-8(2)(1)-9(-1) \\ &= -20-16+9 \\ &= -27 \end{aligned}$$

1.2 Desigualdades

En estudios anteriores habremos visto las igualdades; tema relacionado con la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas. El estudio de las desigualdades es útil, cuando el valor aproximado de una cantidad, interesa más que su valor exacto.

La palabra desigualdad sirve para decir que una cantidad es mayor o menor que otra, para ello utilizamos los símbolos:

$>$: **Mayor que**	$\geq$: **Mayor o igual que**
$<$: **Menor que**	$\leq$: **Menor o igual que**

Las desigualdades en matemáticas son expresiones que comparan dos cantidades utilizando los símbolos "**>:Mayor que**"; "**<:Menor que**"; "**≥:Mayor o igual que**"; "**≤ Menor o igual que**" Por ejemplo, una desigualdad común sería "$x<5$", lo que indica que el valor de x es menor que 5.

1.2.1 Propiedades de las desigualdades

Si ***a***, ***b*** y ***c*** son tres números reales, se cumple que:

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ (Transitiva)

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

Si $a > b$, entonces $a \pm c > b \pm c$)

Si $a < b$, entonces $a \pm c < b \pm c$)

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a/c > b/c$

Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a/c < b/c$

Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a+c > b+d$ (Aditiva)

Si $a > b$ y $c > d$, entonces $ac > bd$

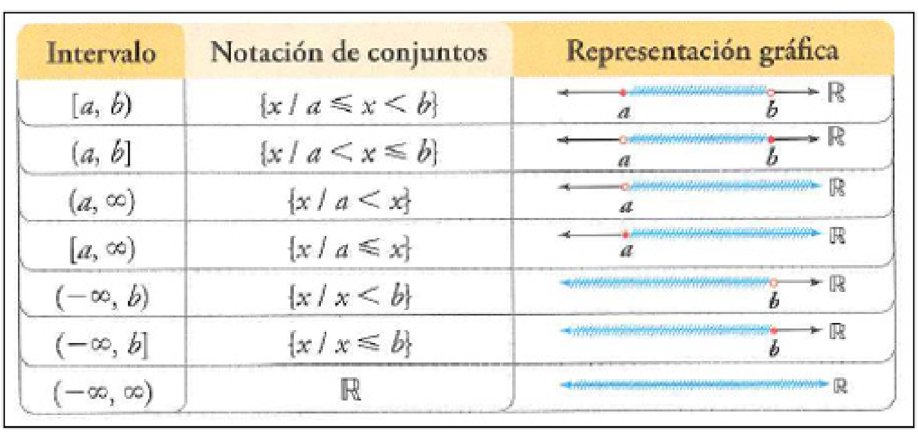
Si $a > b$ y $a > 0$ y $b>0$, entonces $an > bn$

Si $a > b$, entonces $1/a < 1/b$

1.2.2 Intervalos

Los intervalos en matemáticas son conjuntos de números reales que están comprendidos entre dos valores dados. Estos están determinados por las desigualdades, que se representan geométricamente mediante segmentos de recta o semirrectas. Por lo tanto, las operaciones entre conjuntos también se aplican a los intervalos. Veremos a continuación las diferentes clases de intervalos que existen y luego algunos ejemplos.

1.2.4.1 Clases de intervalos



Intervalo	Notación de conjuntos	Representación gráfica
$[a, b)$	$\{x / a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x / a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x / a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x / a \leqslant x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x / x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x / x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Figura 3 Tomado de: Los Caminos del Saber Santillana

Ejemplos

Sean los intervalos A = (-8,1), B = (-∞,4] y C = (-2,∞); Calcular:

1. $A \cup B$ 2. $C \cap B$ 3. $(A \cap B) \cup C$

Solución:

1. $A \cup B = (-8, 4]$ Notación intervalo $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -8 < x \leq 4\}$ Notación de conjunto

2. $A \cup B = (-8, 4]$ Notación intervalo $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 4\}$ Notación de conjunto

3. $(A \cap B) \cup C = (-8, 1] \cup (-2, \infty) = (-8, \infty)$ Notación intervalo

$(A \cap B) \cup C = \{x \in \mathbb{R} | \ x > -8\}$ Notación de conjunto

1.2.3 Inecuaciones

Las inecuaciones son expresiones matemáticas que involucran desigualdades y que describen relaciones entre cantidades. Al igual que las ecuaciones, las inecuaciones pueden contener variables, pero en lugar de igualdades, se utilizan símbolos de desigualdad (>,<,≥,≤) para establecer la relación entre las cantidades. Resolver una inecuación significa encontrar todos los valores de la variable que satisfacen la desigualdad dada.

La desigualdad $2x - 3 > x + 5$ es una inecuación porque tiene la incógnita x y sólo se verifica para cualquier valor de x mayor que 8.

Para resolver una inecuación deben encontrarse los valores de las incógnitas que satisfagan la inecuación.

La resolución de inecuaciones se fundamenta en las propiedades de las desigualdades anteriormente enunciadas y en las consecuencias que de las mismas se derivan. (La solución a una inecuación se da mediante un intervalo).

1.2.4.1 Solución de inecuaciones

Resolver una inecuación implica encontrar todos los valores de la variable que satisfacen la desigualdad dada, la solución de una inecuación recibe el nombre de conjunto solución. Esto se logra aplicando operaciones matemáticas para aislar la variable en un lado de la desigualdad, de manera similar a resolver ecuaciones, pero teniendo en cuenta las reglas específicas para manipular desigualdades, es decir, aplicar las propiedades de las desigualdades antes expuestas para hallar un conjunto de valores que hace posible la desigualdad. Una vez que se ha encontrado el rango de valores válidos para la variable, se pueden representar gráficamente en una recta numérica o intervalos en la línea real; puede expresarse de tres formas diferentes: en notación de intervalo, en notación de conjunto y en forma gráfica. (Ver figura “Clases de intervalos”)

1.2.4.2 Clasificación de las inecuaciones

Las inecuaciones se clasifican atendiendo al número de incógnitas y al grado de la expresión algebraica que aparece en ellas. En la siguiente tabla vemos algunas de las clasificaciones que existen:

INECUACIÓN	TIPO
$2x - 3 > x + 5$	1er grado; una incógnita
$x - 7 \geq 8y$	1er grado; dos incógnitas
$x^2 + 9x \leq -8$	2do grado; una incógnita
$xy < 11$	2do grado; dos incógnitas

Tabla 2 Elaborado por Elkin Vaquero.

1.2.4.3 Inecuaciones de una variable

Son aquellas en las que el conjunto solución está ligado a solo un intervalo de números reales, cabe resaltar que al igual que las ecuaciones, las inecuaciones puede tener o no solución.

1.2.3.3.1 Inecuaciones lineales o de primer grado

Las inecuaciones de 1er grado con una incógnita son las que responden a las siguientes formas básicas:

$\mathbf{ax + b < 0}$ $\quad$ $\mathbf{ax + b > 0}$ $\quad$ $\mathbf{ax + b \leq 0}$ $\quad$ $\mathbf{ax + b \geq 0}$

Donde $a \neq 0$

En la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

Quitar los paréntesis, si los hay.

Quitar denominadores, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

Pasar los términos en x a un miembro (normalmente al primero) y los números al otro.

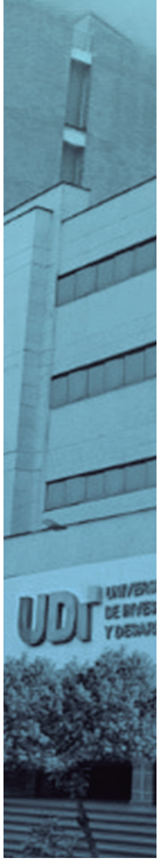
Reducir términos semejantes, con lo que se llega a una ecuación de forma básica.

Si el coeficiente de la x es negativo multiplicamos por -1, por lo que cambiará el sentido de la desigualdad.

Despejar la x (la incógnita).

Obtener la solución en forma de desigualdad, en forma de intervalo o grafica.

Ejemplos:



Dada la siguiente inecuación $7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$. Halle el conjunto solución y grafíquelo

Suprimiendo denominadores (**m.c.m=6**)se tiene: $42 - 3x > 10x - 36$

Trasponiendo términos: $-3x - 10x > -36 - 36$

$$-13x > -78$$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual hace cambiar el signo de la desigualdad original:

$$13x < 78$$

Dividiendo por 13: $x < \frac{78}{13}$ o sea la**Solución:** es $x < 6$

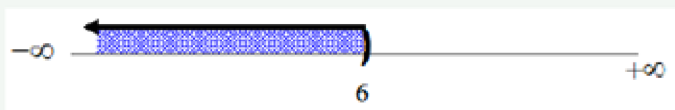


Figura 4 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Dada la siguiente inecuación $\frac{x-2}{3} - \frac{2x^2-1}{2} \leq \frac{1}{4} - x^2$ Halle el conjunto solución y grafíquelo.

Se encuentra el **m.c.m=12** y se multiplica por 12 ambos miembros de la inecuación para obtener:

$4(x-2) - 6(2x^2-1) \leq 3 - 12x^2$

$4x - 8 - 12x^2 + 6 \leq 3 - 12x^2$

Pasando todas las variables al lado izquierdo de la inecuación, se obtiene:

$4x + 6 \leq 3 + 8$

Despejando la variable x de la inecuación, se obtiene: **Solución S=**$(-\infty, \frac{5}{4}] = \{x \in \mathbf{R} | x \leq \frac{5}{4}\}$

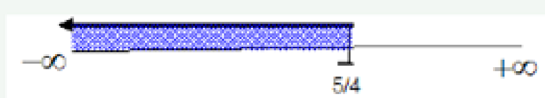


Figura 5 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

1.2.3.3.2 Inecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Las inecuaciones de 2do grado con una incógnita son las que se presentan según alguna de las siguientes formas básicas:

a x ^ 2 + b x + c < 0   **a x ^ 2 + b x + c > 0**   **a x ^ 2 + b x + c ≥ 0**   **a x ^ 2 + b x + c ≤ 0**

Donde a≠0

- En la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:
- Igualamos el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado factorizando el polinomio o usando la formula cuadrática.
- Considerar los casos necesarios para que se cumpla la inecuación.
- Realice la intersección o unión de los conjuntos solución de acuerdo al caso seleccionado.
- Dar la solución en forma de intervalos y graficarla.

Existen diversos métodos para resolver inecuaciones cuadráticas, uno de ellos es el **método analítico**. Veamos un ejemplo:

Dada la siguiente inecuación $x^2+5x+6>0$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

Primer Paso: Factorizar el polinomio dado $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$, quedando una inecuación de la forma: $(x+3)(x+2)>0$

Segundo paso: Los casos que se deben considerar son los siguientes:

Caso I: Cuando ambos binomios son positivos es decir: $(x+3)>0$ y $(x+2)>0$

Caso II: Cuando ambos binomios son negativos es decir: $(x+3)<0$ y $(x+2)<0$

Solución Caso I: Sea S_A el conjunto solución de la inecuación $(x+3)<0$ y S_B al conjunto solución de la inecuación $(x+2)>0$, la solución del Caso I viene dada por: S_I=$S_A \cap S_B$

Solución para S_A $x+3>0$ $x>-3$ $S_A=(-3,\infty)=\{x\in \mathbf{R}|x>-3\}$

Solución para S_B $x+2>0$ $x>-2$ $S_A=(-2,\infty)=\{x\in \mathbf{R}|x>-2\}$

Solución para S_I es: S_I=$S_A\cap S_B=(-3,\infty)\cap(-2,\infty)=(-2,\infty)$

$S_I=(-2,\infty)=\{x\in \mathbf{R}|x>-2\}$

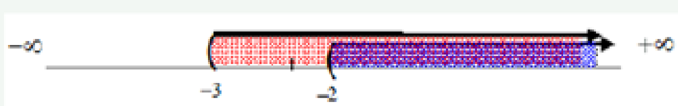
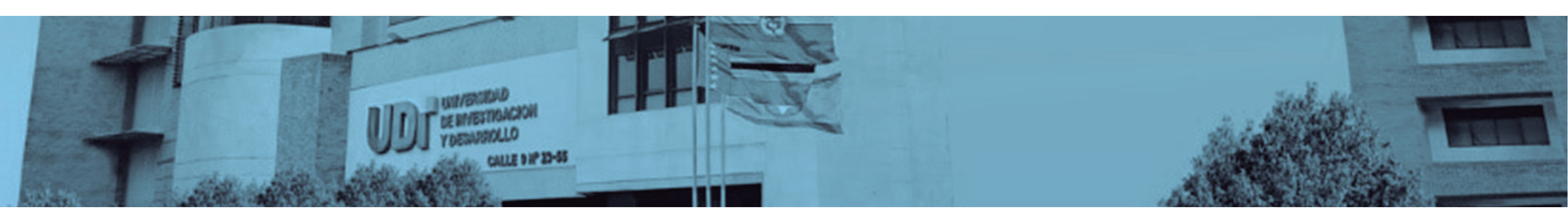


Figura 6 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.



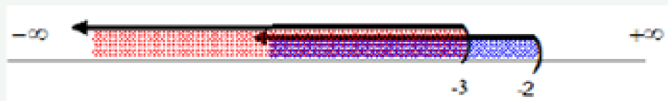
Solución Caso II: Si llamamos S_C al conjunto solución de la inecuación $(x+3)<0$ y S_D al conjunto solución de la inecuación $(x+2)<0$, la solución del **Caso II** viene dada por: $S_{II}=S_C\cap S_D$

Solución para S_C $(x+3)<0$ $S_C=(-\infty,-3)=\{x\in\mathbf{R}|x<-3\}$

Solución para S_D $(x+2)<0$ $S_D=(-infty,-2)=\{x\in\mathbf{R}|x<-2\}$

Entonces la solución para es: $S_{II}=S_C\cap S_D=(-\infty,-3)\cap(-\infty,-2)=(-\infty,-3)$

$S_{II}=(-\infty,-3)=\{x\in\mathbf{R}|x<-3\}$



Solución general: La solución general será la unión de S_I y S_{II}, es decir: $S_G=S_I\cup S_{II}=(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$

Figura 7 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Existe un método alternativo, el **método gráfico**, se conoce como el **método del Cementerio** o **método de las cruces**. Este método consiste igualmente en factorizar el polinomio cuadrático, encontrar las raíces reales y ubicarlas sobre la recta real, dando origen de esta manera a intervalos en la recta. Luego, para cada intervalo, se va evaluando cada binomio para determinar el signo de éste. Por último, se seleccionan los intervalos para los cuales se cumple la desigualdad. Veamos ejemplos:

Dada la siguiente inecuación $x^2+5x+6>0$, halle el conjunto solución y grafique.

Se factoriza el polinomio $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

quedando la inecuación de la forma: $(x+3)(x+2)>0$

Las raíces que anulan $(x+3)(x+2)$ son $x=-3$ y $x=-2$. **(valores de separación)**

Se ubican sobre la recta real **(ver cuadro 1)**.

Se le asignan valores arbitrarios a x en cada intervalo, y se determinan los signos.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

Se aprecia en el cuadro anterior que la desigualdad se cumple para aquellos intervalos donde el producto de los dos binomios es positivo por ser la inecuación >0, por lo tanto la solución viene dada por:

Solución: $S_G=S_I\cup S_{II}=(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$

Figura 8 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Dada la siguiente inecuación $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} < \frac{8}{3}$, halle el conjunto solución y grafique.

Se desarrollan los productos notables, se multiplican por 6 ambos miembros de la inecuación y se reducen términos semejantes, obteniendo: $x^2 - 2x - 15 < 0$

Factorizando el polinomio resultante, se tiene $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$, resultando una inecuación de la forma: $(x-5)(x+3) < 0$

Las raíces de $(x-5)(x+3)$ son $x = 5$ y $x = -3$ **(valores de separación)** las cuales se ubican sobre la recta real.
Se le asignan valores arbitrarios a x en cada intervalo y se determinan los signos de la desigualdad.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,5)$	$(5,\infty)$
$x+3$	$-$	$-$	$+$
$x-5$	$-$	$+$	$+$
$(x+3)(x-5)$	$+$	$-$	$+$

Solución: $S_G = (-3,5) = \{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x < 5\}$
Graficamente:

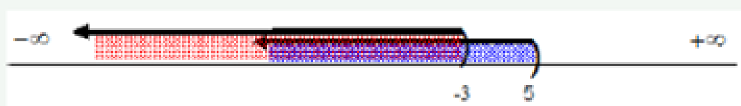


Figura 9 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Casos especiales

◆ Si al resolver la inecuación se obtiene una expresión de la forma:

Expresión	Solución
$(ax+b)^2 \geq 0$	$\mathbb{R}$
$(ax+b)^2 \leq 0$	$x = -\frac{b}{a}$
$(ax+b)^2 > 0$	$\emptyset$
$(ax+b)^2 < 0$	$\mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Tabla 3 Elaborado por Elkin Vaquero.

Ejemplo:

Resolver: $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

Primero deseo hallar los puntos de separación por lo tanto $x^2 + 2x + 1 = 0$

Por lo tanto usando la **fórmula cuadrática** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$
$(x-1)^2 \leq 0$
Como un número elevado al cuadrado es siempre positivo la solución es $\mathbf{R}$

Figura 10 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

- Cuando no tiene raíces reales (discriminante menor que cero), le damos al polinomio cualquier valor si: El signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es R. El signo obtenido no coincide con el de la desigualdad, no tiene solución (vacío, ∅).

1.2.3.3.3 Inecuaciones de grado superior

En el estudio de las inecuaciones de grado superior, nos adentramos en la exploración de desigualdades que involucran polinomios de grado mayor a uno. Tenga en cuenta el siguiente procedimiento para encontrar la solución de este tipo de inecuaciones:

- Se descomponen en factores de primer o segundo grado.
- Se obtienen los ceros de cada factor representándolos en rectas distintas.
- Se estudia el signo de cada uno de los intervalos formados.
- En una nueva recta se llevan todos los ceros, aplicando la regla de los signos.
- Se ve cuales de los intervalos son solución de la inecuación.

Ejemplo:

Resolver la inecuación: $x^3 - 4x < 0$

Resolverla es buscar los valores de la x que hacen que el miembro de la izquierda sea **negativo** por el sentido de la desigualdad.
El procedimiento más sencillo consiste en factorizar el polinomio (en este caso podemos sacar factor común x)

$x(x^2 - 4) < 0$, o lo que es lo mismo $x(x-2)(x+2) < 0$

Tenemos tres valores de x (el 0, 2, -2) que hacen que ese producto valga cero, los restantes valores de la x harán que ese producto sea distinto de 0, bien positivo o negativo. El estudio es el mismo que antes, dibujamos y señalamos sobre la recta real los valores que hacen cero el producto y vamos tomando valores de x y se sustituye en la ecuación inicial para ver el signo de la operación. Observa la gráfica:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x(x-2)(x+2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Solución$=(-\infty,-2)\cup(0,2)$

Figura 11 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

1.2.3.3.4 Inecuaciones racionales

Las inecuaciones racionales son desigualdades que involucran fracciones algebraicas. En este contexto, exploramos las condiciones bajo las cuales una fracción algebraica es mayor, menor o igual a un número real dado.

El estudio de las inecuaciones racionales nos permite analizar y representar intervalos de valores para los cuales la fracción algebraica satisface ciertas condiciones de desigualdad. A través de métodos algebraicos y gráficos, podemos resolver y comprender estas desigualdades, lo que resulta esencial en el análisis y la resolución de problemas matemáticos que involucran expresiones fraccionarias. Las inecuaciones racionales son herramientas fundamentales en el modelado de situaciones variables y complejas. Se resuelven de un modo similar a las de segundo grado, pero hay que tener presente que el denominador no puede ser cero. Estos tipos de problemas pueden ser resueltos usando el método analítico o el método gráfico.

Procedimiento a tener en cuenta:

- Hallamos las raíces del numerador y del denominador.
- Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas.
- Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo.
- La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que la fracción polinómica.

Ejemplo:

Dada la siguiente inecuación: $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}<0$ halle el conjunto solución y grafique.

Factorizando los polinomios dados $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$ y $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

Resultando una inecuación de la forma $\frac{(x+5)(x-2)}{(x+2)(x-1)}<0$

Las raíces que anulan el numerador son y , y las que anulan el denominador son y , las cuales se ubican sobre la recta real. Se le asignan valores arbitrarios a x en cada intervalo, y se determinan los signos de la desigualdad.

	$(-\infty,-5)$	$(-5,-2)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}<0$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Se observa en el cuadro anterior que la desigualdad se cumple para aquellos intervalos donde el cociente es negativo, debido a que la inecuación original es <0 (es negativa) por lo tanto la solución viene dada por:

Solución: $S_G=(-5,-2)\cup(1,2)$

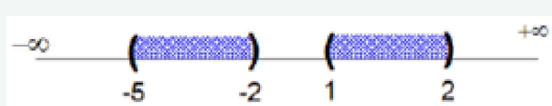


Figura 12 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

1.2.3.3.5 Inecuaciones con valor absoluto

Las inecuaciones con valor absoluto son desigualdades que involucran expresiones que contienen el valor absoluto de una variable. En este contexto, exploramos las condiciones bajo las cuales el valor absoluto de una expresión es mayor, menor o igual a un número real dado. Las expresiones $|ax+b|>c$; $|ax+b|<c$; $|ax+b|\geq c$ y $|ax+b|\leq c$, representan inecuaciones de primer grado con valor absoluto.
Si a es un número real tal que $a\geq 0$, entonces las inecuaciones con valor absoluto cumplen las siguientes propiedades:

$|x|>a$ sí y solo $x > a$ V $x < -a$

$|x|<a$ sí y solo $-a < x < a$

$|x|\leq|a|$ sí y solo $x^2 \leq a^2$

$|x|\geq a$ sí y solo $x \geq a$ V $x \leq -a$

$|x|\leq a$ sí y solo $-a \leq x \leq a$

Ejemplos:

Encuentre el conjunto de soluciones que satisface $|5x+10| \leq 15$ y grafique.

Aplicando la propiedad de las desigualdades con valor absoluto, obtenemos: $-15 \leq 5x+10 \leq 15$

$-15-10 \leq 5x \leq 15-10$

$\frac{-25}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{5}{5}$

$-5 \leq x \leq 1$

Solución: $S = [-5,1] = \{x \in R | -5 \leq x \leq 1\}$

Graficamente:

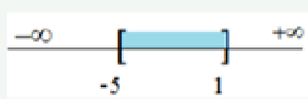


Figura 13 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Resuelva la desigualdad $|3x+2| \geq 4$.

SOLUCIÓN Por la Propiedad 4, la desigualdad $|3x+2| \geq 4$ es equivalente a

$$3x+2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x+2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \qquad 3x \leq -6 \qquad \text{Reste 2}$$

$$x \geq \tfrac{2}{3} \qquad x \leq -2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en

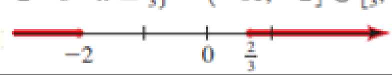


Figura 14 Tomado de: Precálculo, Matemáticas para el Cálculo, Sexta edición.

2. UNIDAD 2. FUNCIONES

Bienvenidos a la segunda unidad de nuestro curso de Matemáticas I, donde nos adentraremos en el fascinante mundo de las funciones de variable real. En esta etapa, avanzaremos más allá de los conceptos básicos y exploraremos cómo las funciones se convierten en herramientas poderosas que trascienden las fronteras de las matemáticas, extendiéndose a diversos campos del conocimiento.

Funciones como herramientas fundamentales. Las funciones son esenciales en el análisis y la resolución de problemas en disciplinas tan diversas como la física, la economía, la biología y más. Son como las cajas de herramientas del matemático, permitiéndonos modelar, entender y predecir fenómenos en el mundo real. Al profundizar en este capítulo, descubriremos cómo las funciones se convierten en aliadas invaluables en la descripción de patrones, la optimización de recursos y la comprensión de fenómenos complejos.

Explorando propiedades y características. En esta unidad, nos sumergiremos en las propiedades y características de las funciones de variable real. Analizaremos cómo cambian, crecen o disminuyen, y cómo podemos utilizar esta información para resolver problemas prácticos. La comprensión profunda de estas propiedades nos abrirá puertas hacia la solución efectiva de desafíos en el mundo real.

Un vistazo al papel de las funciones en la resolución de problemas reales. Además, destacaremos la importancia de entender las funciones como herramientas versátiles para la resolución de problemas reales. Veremos ejemplos concretos de cómo las funciones son utilizadas para abordar cuestiones económicas, analizar fenómenos naturales y optimizar recursos en situaciones cotidianas.

Estamos a punto de emprender un viaje emocionante en el que las funciones se revelarán como aliadas cruciales en el mundo de las matemáticas aplicadas. Prepárense para desafíos estimulantes y descubrimientos reveladores mientras exploramos las posibilidades infinitas que las funciones de variable real nos ofrecen. ¡Comencemos nuestro viaje hacia el fascinante universo de las funciones!

2.1 Funciones de variable real

En prácticamente todos los fenómenos cotidianos, físicos, en las ciencias económicos y en la ingeniería; observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, su estatura depende de su edad, la temperatura de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo de su paseo.

Todos estos son ejemplos de funciones; aunque no existe una regla simple que relacione la estatura con la edad o la temperatura con la fecha, sí existe una que relaciona el costo de enviar un paquete por correo con su peso; estás relaciones pueden ser representadas mediante un modelo matemático que permite describir esta relación, estas relaciones se conocen como **funciones**.

El concepto de función no apareció hasta los inicios del cálculo en el siglo XVII. René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz establecieron la idea de función como dependencia entre dos cantidades variables. Leibniz en particular acuñó los términos «función», «variable», «constante» y «parámetro».

2.1.1 Definición de función

Una función f es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de un conjunto A llamado dominio un valor único f(x) de otro conjunto B. El subconjunto de B formado por todos los elementos y a los que se les asigna elementos de A, se llama rango o recorrido de la función, y cada uno de sus elementos se llama imagen.
Representemos en un diagrama de flechas una relación que es función y una que NO es función:

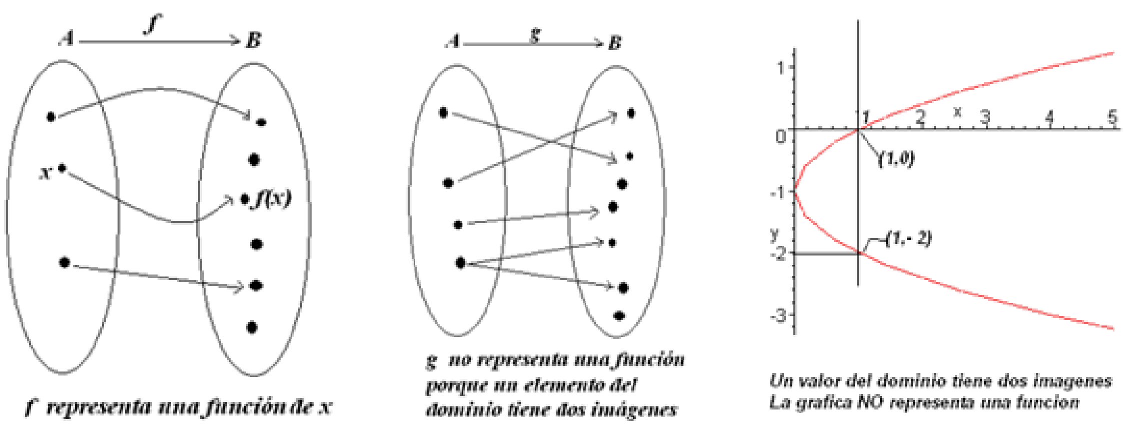


Figura 15 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Si una gráfica contiene los puntos $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y $(\mathbf{a},\mathbf{c})$, entonces dicha gráfica no representa una función, ya que a un valor del dominio le corresponden dos valores del rango, ver ejemplo en la figura anterior donde se representa en el plano cartesiano una relación que no es función.
Las funciones se representan mediante ecuaciones de la forma $\mathbf{y = f(x)}$, por ejemplo:

$$\mathbf{y = f(x) = x^2;} \qquad \mathbf{y = g(x) = 3x^2 + x;} \qquad \mathbf{y = h(x) = \frac{x + 1}{x - 3}}$$

$$\mathbf{y = j(x) = \sqrt{x} + 6;} \qquad \mathbf{y = t(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{x + 4}} \qquad \mathbf{y = k(x) = sen(x)}$$

Por otra parte, en las funciones del tipo y=f(x), la relación entre ambas variables x e y está claramente determinada. Por ese motivo la expresión y=f(x) recibe el nombre de

forma explícita de la función. Sin embargo, en algunas ocasiones la relación entre las variables de la función no viene expresada de una forma tan clara sino a través de una ecuación que las liga, como, por ejemplo:

$$3x - 2y + 5 = 0 \qquad 2x - x^2 + 3y = 0 \qquad x - 3 + y^2 = 0 \qquad x - 3 + y^3 = 0$$

Podemos decir que esta manera de representar una función recibe el nombre de **forma implícita** de la función. La relación entre ambas variables viene dada por una ecuación en la que hay que despejar la variable dependiente para poder encontrar la relación entre ambas.

2.1.2 Representaciones de una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de flecha y el plano cartesiano. Podemos describir una función específica de cuatro formas; verbalmente (por descripción en palabras), algebraicamente (por una fórmula explícita), visualmente (por una gráfica) y numéricamente (por una tabla de valores).

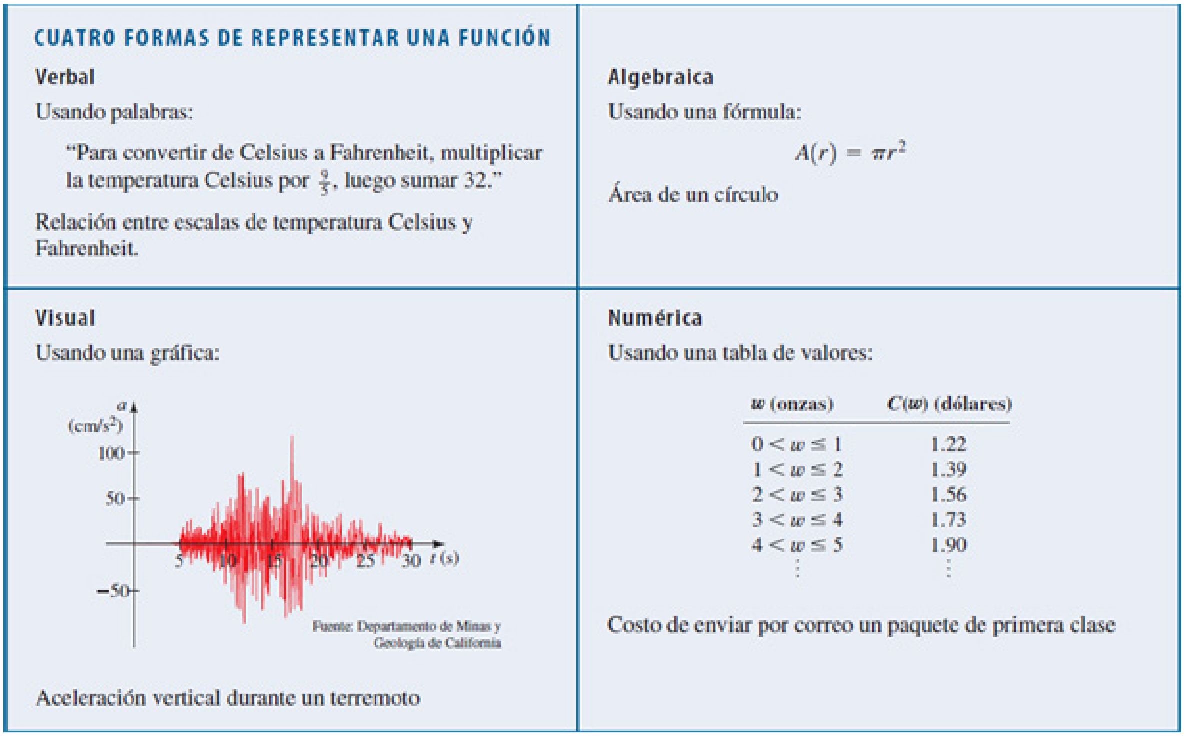
Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros.

Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura: *"Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por 95 la temperatura Celsius y luego sumar 32."*

Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica $\mathbf{A(r)} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^2$

La gráfica producida por un sismógrafo es una representación visual de la función de aceleración vertical $\mathbf{a(t)}$ del suelo durante un terremoto.

Como un ejemplo final, considere la función $\mathbf{C(w)}$, que se describe verbalmente como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso „". La forma más conveniente de
describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.
En la siguiente imagen vemos los ejemplos:



CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:

Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

Figura 16 Tomado de: Precálculo, Matemáticas para el Cálculo, Sexta edición.

2.1.3 Elementos de una función

Los dos principales elementos de una función son los posibles valores que pueden tomar ambas variables (dependiente e independiente).

◈ Se llama **Dominio** de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (**x**) de manera que la expresión dada tenga sentido en los números reales. El dominio de una función del tipo **y=f(x)** suele representarse con alguna de estas expresiones: **D(f)**, **Dom (f)**, entre otras.

◈ Se llama **Recorrido, Rango, Imagen** o **codominio** de una función al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (**y**), es decir, es el conjunto de valores que puede alcanzar la función. El recorrido de una función del tipo **y=f(x)** suele representarse con alguna de estas expresiones: **R(f)**, **Ran(f)**, **Im (f)**.

2.1.4 Tipos de funciones y su dominio

A continuación, estudiaremos algunas de las funciones de una variable que existen y que son las de mayor uso en el campo de las ciencias, destacaremos además los respectivos valores que puede tomar la variable independiente, es decir, los valores que conforman el dominio de la función.

2.1.4.1 Funciones polinómicas

Una función polinómica es de la forma:

$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0}$, donde $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^+$. El dominio de una función polinómica es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Ejemplos: Las funciones $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 3x + 2; g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2; h(x) = 2x - 5}$ son funciones polinómicas, luego $\boldsymbol{Domf(x)} = \mathbb{R}$.

2.1.4.2 Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas, es decir, son de la forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})}$. Una expresión de números reales de la forma $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$ existe si $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$, de manera que para hallar el dominio de una función racional basta con igualar el denominador a cero y determinar así los valores de x que no pertenecen al dominio (valores críticos del denominador). Por tanto, el dominio de una función racional es el conjunto de los números reales que no hacen cero el denominador.

Ejemplos: Las funciones $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}; \; g(x) = \frac{x-4}{2x^2-x+4}; \; h(x) = \frac{x}{x^4-x}}$ son funciones racionales.

Hallar el dominio de la función

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$$

Igualamos el denominador a cero: $x^2+3x+2=0$

Factorizamos: $(x+2)(x+1)=0$ este producto es cero si uno de sus factores es cero, así:

$x+2=0$, entonces: $x=-2$

$x+1=0$, entonces: $x=-1$

De lo anterior, deducimos que los números -2 y -1 no pertenecen al dominio y por lo tanto:

$Domf(x) = \mathbf{R} - (-2,-1)$

Figura 17 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.1.4.3 Funciones con radicales

Las funciones con radicales son de la forma $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$.. El dominio depende del índice de la raíz; si la raíz es de índice $\mathbf{n}$ impar, el dominio es $\boldsymbol{Domf(x)} = \mathbb{R}$; si la raíz es de índice $\mathbf{n}$ par, el dominio son los valores $\mathbf{x}$ que hacen $\mathbf{p(x) \geq 0}$.

Ejemplos: Las funciones $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2}$; $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+4}}$; son funciones con radicales.

Hallar el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

La expresión que define a esta función tiene validez en los Reales solamente si el radicando es mayor o igual que cero, es decir si:

$$x^2 - 1 \geq 0$$

al resolver la inecuación se obtienen los valores que pertenecen al dominio.

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(x-1) \geq 0$$

Al resolver la inecuación usando el método del cementerio se obtiene que los valores que satisfacen la ecuación son:

$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

entonces:

$$Domf(x) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Figura 18 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.1.4.4 Función exponencial

Una función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$. La función exponencial está definida para todos los números reales, por lo tanto, su dominio se representa como: $\boldsymbol{Dom(f)} = \mathbb{R}$.

Ejemplos: Las funciones $f(x) = 2^{x-3}$; $h(x) = 2e^x$ son funciones exponenciales, luego $\boldsymbol{Domf(x)} = \mathbb{R}$.

2.1.4.5 Función logarítmica

Una función logaritmo es de la forma $f(x)=Log_a\,[g(x)]$. Recordemos que la función logaritmo está definida en los reales positivos, por lo que los logaritmos de números negativos y el cero no existen. Entonces, su dominio son los valores de x que hacen $g(x)>0$.

Hallar el dominio de f definida como

$$f(x) = Ln(1-x^2)$$

La función logaritmo natura $f(x)$ está definida si $1-x^2>0$

Resolviendo la inecuación tenemos:

$$Dom f(x) = (-1,1)$$

Figura 19 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.1.5 Recorrido o rango de algunas funciones

Algunas funciones permiten hallar de manera sencilla sus recorridos.
Ejemplos:

◈ Hallar el recorrido de la función $y = t(x) = \frac{2x+1}{x-5}$

Para lograrlo despejamos x:

$$y(x-5) = 2x+1 \rightarrow xy - 5y = 2x+1$$
$$xy - 2x = 5y + 1 \rightarrow x(y-2) = 5y+1$$
$$x = \frac{5y+1}{y-2}$$

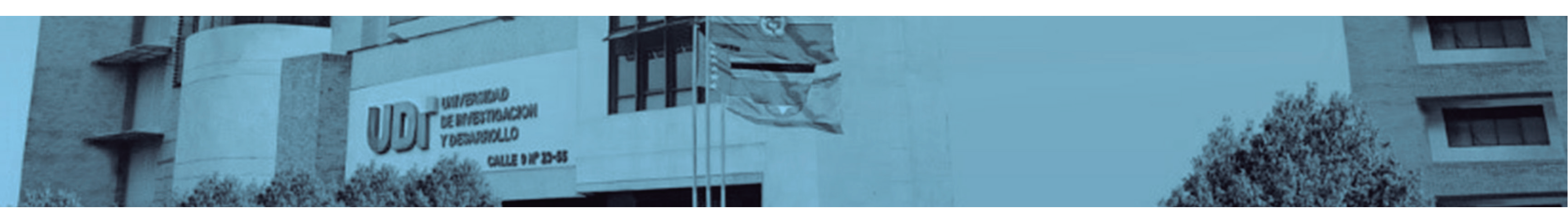
Entonces, en la última ecuación y debe ser distinto de 2, es el único valor que no pueden tomar las imágenes, por lo tanto, la solución es:

$$Rant(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

◈ En las funciones polinómicas de grado impar el rango es igual a los números reales $\mathbb{R}$.
◈ En las funciones polinómicas de grado dos el rango se puede obtener a partir del vértice de la parábola.

2.1.6 Intersecciones con los ejes

Un punto $(a,0)$ es una intersección de la gráfica de f con el eje x sí $f(a)=0$, es decir, si este punto es una solución de la ecuación que define a f. Por lo tanto, para hallar la intersección de la gráfica con el eje x debemos hacer $y = 0$ y resolver la ecuación que se obtiene. Un punto $(0,b)$ es una intersección de la gráfica de f con el eje y si $f(0)=b$ es decir, si este punto es una solución de la ecuación que define a f. Por lo tanto, para hallar la intersección de la gráfica con el eje y debemos hacer $x = 0$ y resolver la ecuación que se obtiene. Las intersecciones con los ejes se llaman interceptos. A continuación, se muestran algunos dibujos para ilustrar lo que hemos afirmado anteriormente:



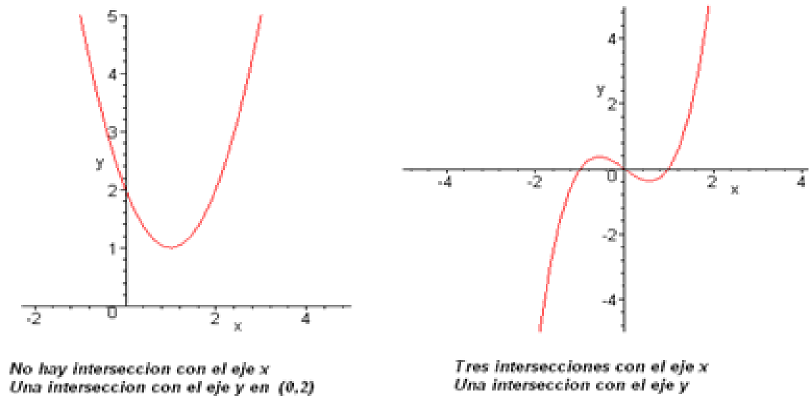


Figura 20 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Ejemplo:

Halle los interceptos de la función $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-7}$

Solución:

Intersección con el eje y

Hacemos $x = 0$, entonces: $y = -\dfrac{2}{7}$

Intersección con el eje x

Hacemos y = 0, entonces: $0 = \dfrac{2x+2}{x-7}$ por lo tanto $2x+2=0$ y obtenemos que: x = - 1

Figura 21 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.2 Simetrías de una función

Al igual que el conocimiento de las propiedades anteriores, el hecho de saber si la gráfica de una función presenta algún tipo de simetría nos permitirá conocer los valores que toma la función en determinada zona sin más que conocer los valores de la misma función en la zona simétrica. Una función puede presentar diferentes tipos de simetría, o ningún tipo en absoluto. De todos los posibles tipos de simetría que pueden presentarse hay dos que son fácilmente detectables y es en esos dos tipos en los que vamos a centrar nuestro estudio.

Una función $f(x)$ es:

- Simétrica respecto al eje y si $f(x) = f(-x)$.
- Simétrica respecto al origen de coordenadas si $f(-x) = -f(x)$

Veamos los siguientes ejemplos

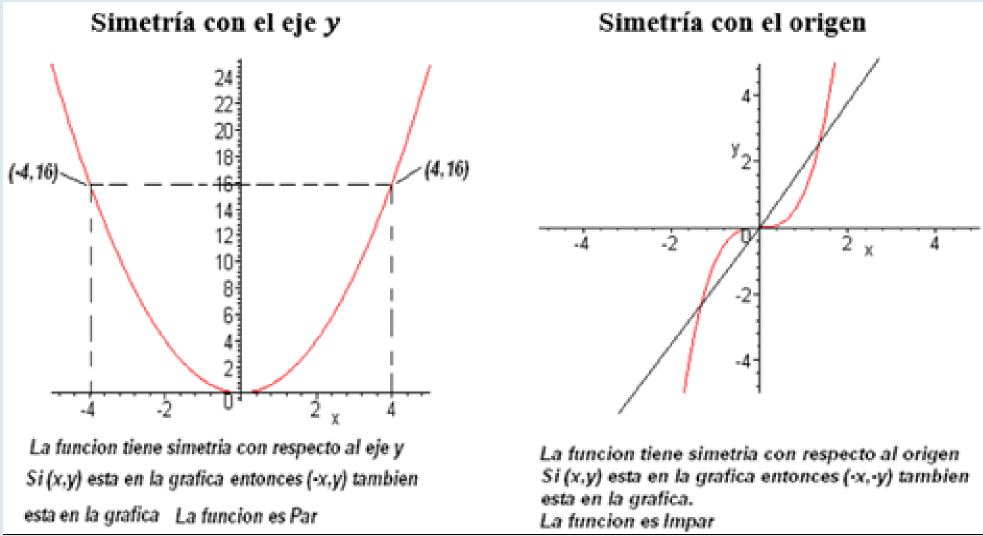


Figura 22 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.2.1 Funciones par e impar

Sea f una función, entonces:

- f es par si satisface $f(x) = f(-x)$
- f es impar si satisface $f(-x) = -f(x)$

Ejemplos:

- La función $f(x) = x^2$ es par, veamos: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ por lo tanto es par.
- La función $f(x) = x^3$es impar, veamos: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ por lo tanto es impar.

2.3 Álgebra de funciones

Definimos las operaciones básicas entre funciones así:

- Adición $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Diferencia $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- Producto $(f{\cdot}g)(x) = f(x).g(x)$
- Cociente $(f/g)(x) = (f(x))/(g(x)),\ g(x)\neq 0$

En cada uno de los casos anteriores, el dominio de la función resultante, es la intersección de los dominios de f y g. En el caso particular del cociente se deben excluir de la intersección los valores de x que anulen el denominador g.

Ejemplo: Dadas $f(x) = x^3 + 2x$ y $g(x) = 1/x$. Determinar $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$ $(f \cdot g)(x)$ y los dominios

En primer lugar, es necesario determinar el dominio de cada función:
$Domf = \mathbb{R}$ (es un polinomio); $Domf = \mathbb{R} - \{0\}$ (porque no se puede dividir por cero)
Realicemos las operaciones:

$$f(x)+g(x)=(x^3+2x)+\left(\tfrac{1}{x}\right)=\frac{x^4+2x^2+1}{x}=\frac{(x^2+1)^2}{x}$$

$$Dom(f+g)=Dom\,f\cap Dom\,g=\Re-\{0\}$$

$$f(x)-g(x)=(x^3+2x)-\left(\tfrac{1}{x}\right)=\frac{x^4+2x^2-1}{x}$$

$$Dom(f-g)=Dom\,f\cap Dom\,g=\Re-\{0\}$$

$$f(x)\times g(x)=(x^3+2x)\times\left(\tfrac{1}{x}\right)=\frac{x^3+2x}{x}=x^2+2$$

$$Dom(f\times g)=Dom\,f\cap Dom\,g=\Re-\{0\}$$

Figura 23 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

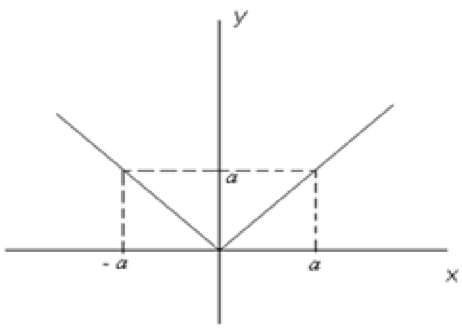
2.4 Función a trozos

Hasta ahora hemos visto cómo las funciones, sean del tipo que sean, suelen admitir una expresión del tipo $y = f(x)$. Hemos visto también que es especialmente interesante (pues facilita la obtención de información) que la expresión $f(x)$ sea de tipo matemático. Hasta ahora hemos trabajado con expresiones simples como, por ejemplo:

$$y=-\frac{x^2}{3}+2x+3 \qquad y=\frac{3+2x}{x-4} \qquad y=\left|x^2-3x+2\right|$$

Sin embargo, con mucha frecuencia, las expresiones analíticas que aparecen en las Ciencias Sociales no admiten una única formulación para todos los valores de la variable independiente, de manera que es necesario utilizar diferentes fórmulas para la función según los distintos valores de x. De este tipo de funciones se dice que están definidas a trozos.
Una función a trozos es aquella en la que se usan **"trozos"** de funciones para conformar una nueva función (es decir, cuando definimos una función con expresiones parciales y se especifica el dominio de cada una de ellas), por ejemplo, la función valor absoluto se puede considerar como una función a trozos, veamos:

$$|x|=\begin{cases} x & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 2 \\ 1 & si \quad 2<x<3 \\ 2x-5 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$$



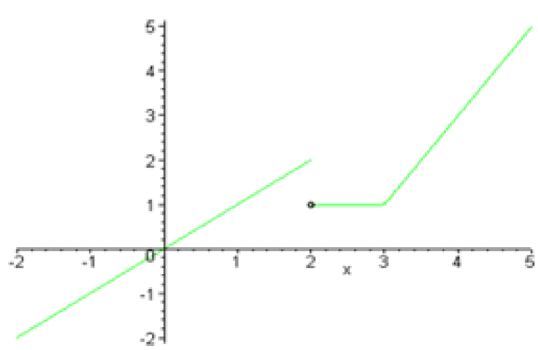


Figura 24 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.5 Movimientos en el plano

2.5.1 Translación vertical

La ecuación $y = f(x)+k$, k una constante, describe una traslación vertical de $y = f(x)$ de $|k|$ unidades.

- Si $k > 0$, la traslación es hacia arriba.
- Si $k < 0$, la traslación es hacia abajo.

2.5.2 Translación horizontal

La ecuación $y = f(x + \text{h})$, h una constante, describe una traslación horizontal de $y = f(x)$ de $|h|$ unidades.

- Si $h > 0$, la traslación es hacia la derecha.
- Si $h < 0$, la traslación es hacia la izquierda.

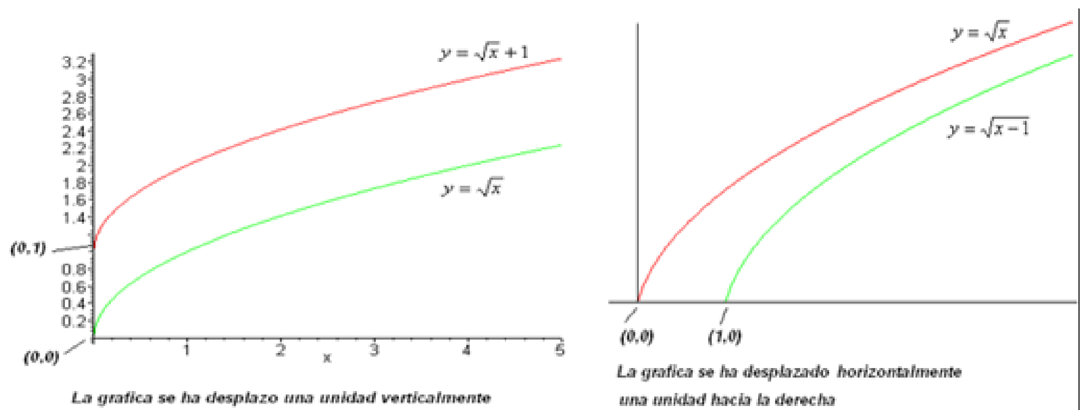


Figura 25 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.6 Gráficas de funciones básicas

Existen algunas funciones que son de uso común en el desarrollo de los cursos de cálculo, entre ellas tenemos:

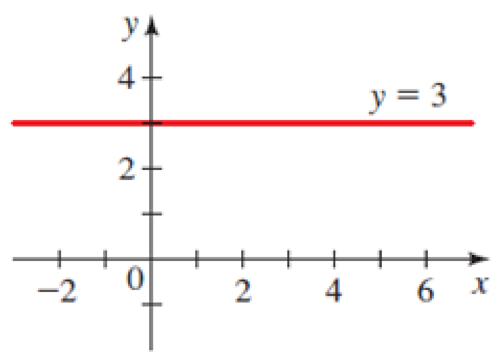
- Función constante: $f(x) = c$
- Función Lineal: $f(x) = ax + b$
- Función Cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Función Cúbica: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Función Raíz Cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$
- Función Valor Absoluto: $f(x) = |x|$
- Función Racional: $f(x) = \frac{1}{x}$

- Función logarítmica $f(x) = Log_a(x)$
- Función exponencial $f(x) = a^x$
- Función logística $f(x) = \frac{a}{b+e^{-cx}}$
- Función seno $f(x) = senx$
- Función coseno $f(x) = cos\,x$

A continuación, veamos las gráficas de algunas de estas funciones:

2.6.1 Función constante

Una función constante es un tipo de función matemática en la que el valor de la función es constante para todos los valores posibles de la variable independiente. En otras palabras, no importa qué valor tome la variable independiente, la función siempre devuelve el mismo resultado. La forma general de una función constante es: $f(x)=c$. En una representación gráfica, una función constante se muestra como una línea horizontal paralela al eje x, ya que el valor de la función no cambia con respecto a x.

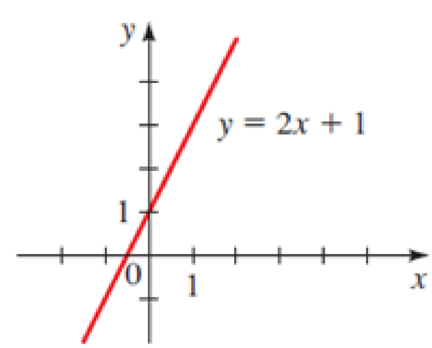


La función constante $f(x) = 3$

Figura 26 Tomado de: Precálculo, Matemáticas para el Cálculo, Sexta edición.

2.6.2 Función lineal

Una función lineal es un tipo específico de función matemática cuya representación gráfica es una línea recta. La forma general de una función lineal es: $f(x)=ax+b$. La función lineal describe una relación proporcional entre la variable independiente x y la variable dependiente $f(x)$. La pendiente a determina la dirección y la inclinación de la línea, mientras que la ordenada al origen b indica dónde la línea corta el eje vertical (cuando $x=0$).



La función lineal $f(x) = 2x + 1$

Figura 27 Tomado de: Precálculo, Matemáticas para el Cálculo, Sexta edición.

2.6.3 Función cuadrática

Una función cuadrática es un tipo de función matemática que puede ser expresada por una ecuación cuadrática, que tiene la forma general: $f(x)=ax$^2+$bx+c$. La gráfica de una función cuadrática es una parábola, donde debe tenerse en cuenta que puede abrir hacia arriba (si $a>0$) o hacia abajo (si $a<0$). La posición y forma de la parábola están determinadas por los coeficientes a, b y c.

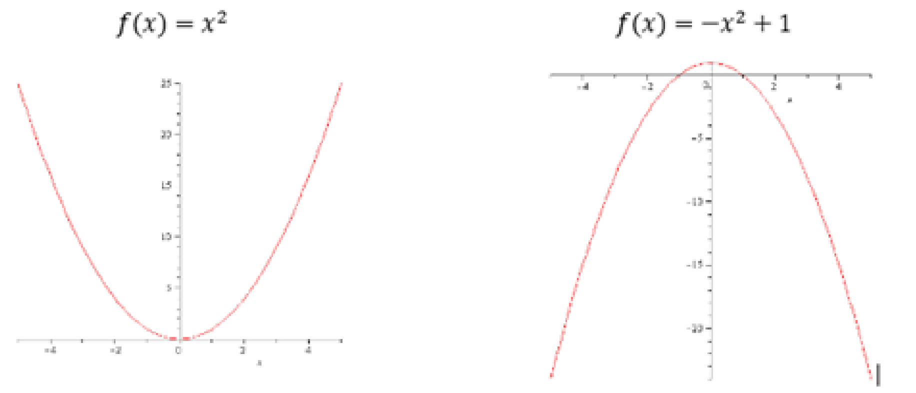


Figura 28 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.6.4 Función cúbica

Una función cúbica es un tipo de función matemática cuya expresión general es una ecuación cúbica, que tiene la forma: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. La gráfica de una función cúbica es una curva suave que puede tener uno, dos o tres puntos de inflexión, dependiendo de los valores de los coeficientes. Las funciones cúbicas son útiles para modelar situaciones en las que hay un cambio gradual y continuo en una variable en relación con otra.

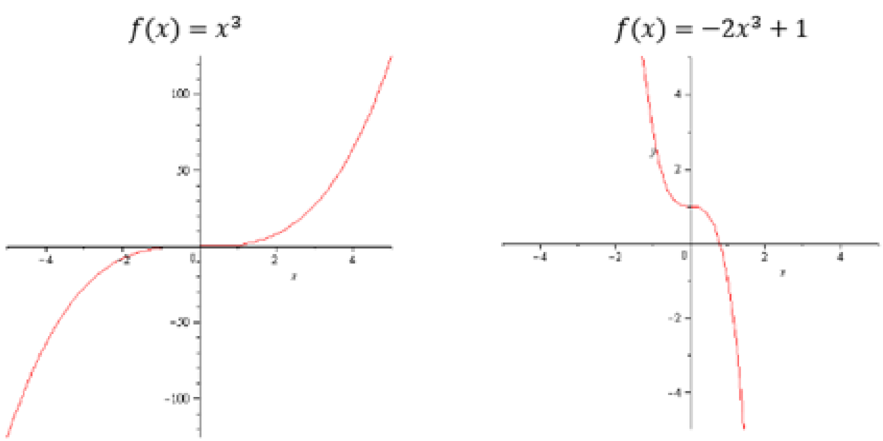


Figura 29 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.6.5 Función raíz cuadrada

Una función raíz cuadrada es una función matemática que asigna a cada número real no negativo x otro número real no negativo y, tal que $y^2=x$. La notación común para la función raíz cuadrada es $f(x)=\sqrt{x}$. La función raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. El resultado de la raíz cuadrada siempre es un número no negativo, ya que no existe un número real cuyo cuadrado sea negativo. La gráfica de la función raíz cuadrada es la mitad superior del gráfico de la parábola $y=x^2$ y está limitada al primer y segundo cuadrante del plano cartesiano.

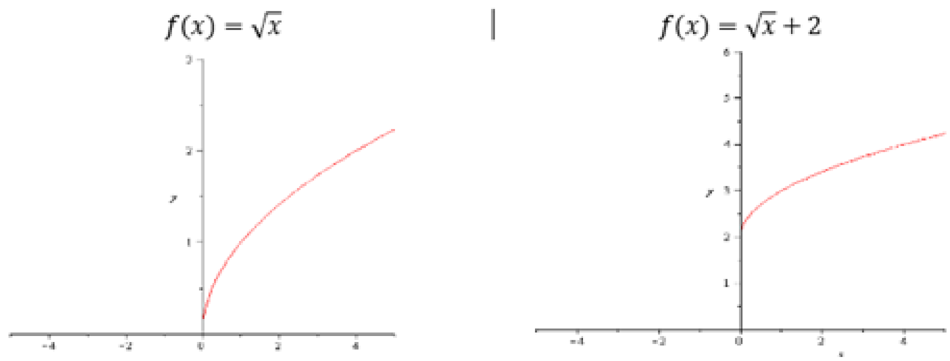


Figura 30 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

2.6.6 Función valor absoluto

La función valor absoluto, denotada comúnmente como |x| es una función matemática que asigna a cada número real x su distancia respecto a cero en la recta numérica. Formalmente, la definición de la función valor absoluto es:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

En palabras simples, si x es no negativo, el valor absoluto de x es simplemente x. Si x es negativo, el valor absoluto de x es su opuesto negativo, es decir, -x. Esto asegura que el resultado siempre sea un número no negativo. La función valor absoluto se representa gráficamente como una "V" en el plano cartesiano, con el vértice en el origen (0,0). Su gráfica refleja la simetría respecto al eje vertical, ya que |x|=|-x| para cualquier x real.

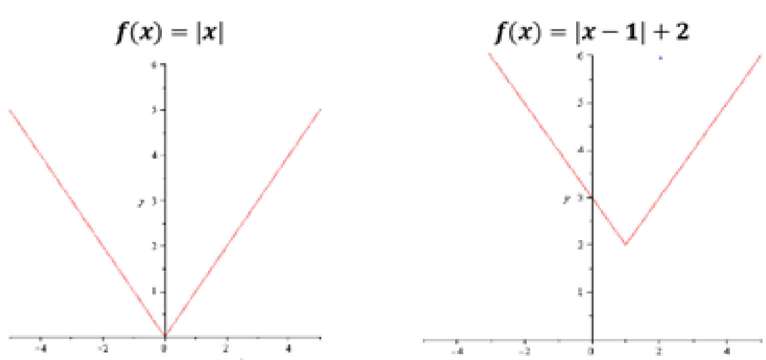
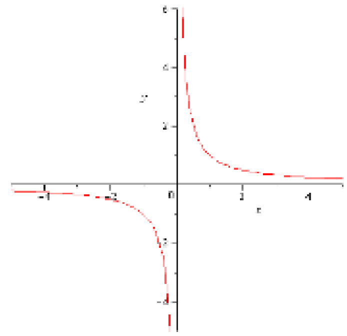


Figura 31 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

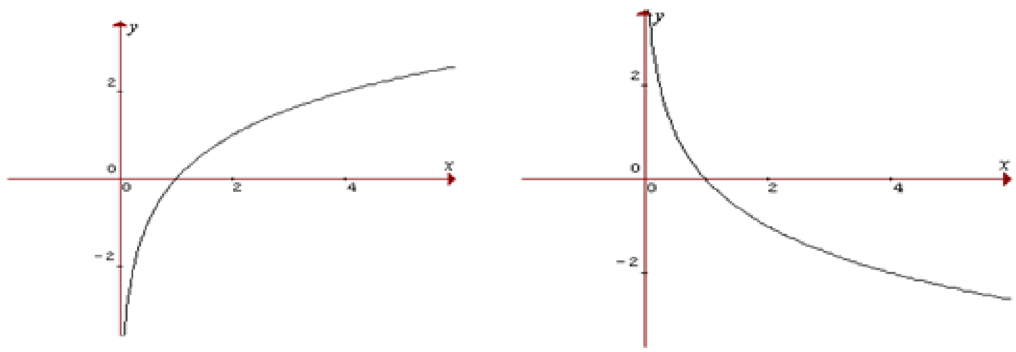
2.6.7 Función racional

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



2.6.8 Función logarítmica

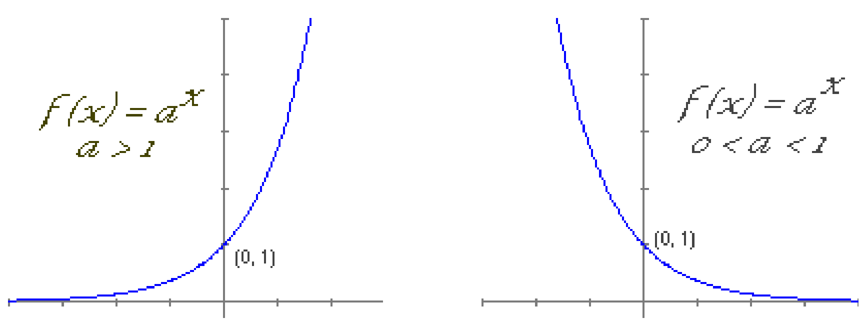
$$f(x) = Log_a(x)$$



a > 0 0 < a< 1

2.6.8 Función logarítmica

$$f(x) = a^x$$



2.7 Composición de funciones o función compuesta

En general, dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

La función $(g \circ f)(x)$ es la función compuesta de f y g, que transforma x en $g[f(x)]$.
Se debe tener cuidado con los dominios de $(g \circ f)$ y de $(f \circ g)$. El dominio de $(g \circ f)$ es la parte del dominio de f, para los cuales g acepta a $f(x)$ como preimagen.
También, el dominio de $(f \circ g)$ es la parte del dominio de g para los cuales f acepta a $g(x)$ como preimagen.

Ejemplo: Si f y g son las funciones definidas por:

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Entonces:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{g(x)-3}{2} = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Del ejemplo anterior se deduce fácilmente que en general:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

$Domf = \mathbb{R}$, ahora, como g, solo acepta reales positivos de $f(x)$, esto es, valores de x para los cuales:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Se concluye entonces que: $Dom(g \circ f) = [3, \infty)$

Nótese que $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(-1)$ **NO ESTA DEFINIDO.**

Igualmente, $(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g\left(\frac{-1}{2}\right)$ **NO ESTA DEFINIDO**.

$Domg = [0, \infty)$, ahora, como f acepta cualquier valor real de $g(x)$, entonces f acepta en particular, los valores de g en el intervalo $Domg = [0, \infty)$.
De esta forma: $Dom(f \circ g) = [0, \infty)$.

2.8 Función inversa

Dada una función $f(x)$, su inversa es otra función, designada por $f^{-1}(x)$ de forma que se verifica que, Si $f(a) = b$ entonces $f^{-1}(b) = a$

Propiedades

- Toda función y su inversa son simétricas a la función identidad (y=x).
- La compuesta de una función y su inversa da como resultado la función identidad

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

- El **dominio** de la función inversa es igual al **rango** de la función directa, y el **rango** de la función inversa es igual **dominio** de la función directa.

$$Dom f^{-1}(x) = Rango f(x) \qquad Rango f^{-1}(x) = Dom f(x)$$

- $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

Para que exista la inversa de una función ésta debe cumplir con la condición de ser una **función inyectiva**.

Función inyectiva: Una función f es inyectiva (uno a uno) si se cumple que:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2; \forall x_1, x_2 \in D(f)$

o equivalentemente,

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2); \forall x_1, x_2 \in D(f)$

Si tenemos la función y=f(x), y queremos hallar su inversa, seguimos los siguientes pasos:

Se intercambian la x y la y en la expresión inicial: $y = f(x) \Longrightarrow x = f(y)$

Se despeja la y en la nueva expresión $x = f(y) \Longrightarrow y = f^{-1}(x)$.

Ejemplo:

Hallar la inversa de $y = 2x$.

1) Cambiamos la x por la y y de forma viceversa nos queda entonces $x = 2y$

2) Despejamos la y, nos queda entonces $y = \frac{x}{2}$

Por tanto la función inversa de $y = 2x$ es $y = \frac{x}{2}$;

es decir $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

Figura 32 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

3. UNIDAD 3. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Bienvenidos a la emocionante Unidad 3, donde nos sumergiremos en el fascinante mundo de los límites y la continuidad de las funciones. Estos conceptos avanzados desentrañan los secretos del comportamiento de las funciones en puntos críticos, revelando cómo se acercan o se alejan de valores específicos.

Descifrando el comportamiento con límites. En esta unidad, exploraremos la noción de límites, una herramienta poderosa que nos permite entender cómo una función se comporta cuando la variable independiente se aproxima a un valor determinado. Describiremos el infinitesimal acercamiento a puntos clave, revelando patrones intrigantes y comportamientos asintóticos que desafían la intuición.

La continuidad como garante de suavidad. Acompañando la exploración de límites, abordaremos el concepto de continuidad, que asegura la suavidad y cohesión de una función. Entenderemos cómo una función puede fluir sin interrupciones, evitando saltos o quiebres, y cómo la continuidad es esencial para comprender el comportamiento global de una expresión matemática.

Aplicaciones prácticas en diversos campos. Estos conceptos no solo son abstractos, sino que tienen aplicaciones tangibles en campos como la física, la ingeniería y las ciencias socioeconómicas. Descubriremos cómo los límites y la continuidad son herramientas esenciales para modelar fenómenos físicos, analizar estructuras ingenieriles y entender dinámicas económicas.

Prepárense para desafíos avanzados y descubrimientos profundos. Estamos a punto de adentrarnos en una fase avanzada de nuestro curso, donde los límites y la continuidad se convertirán en herramientas fundamentales para comprender el tejido mismo de las funciones matemáticas. Prepárense para desafíos estimulantes, visualizaciones intrigantes y descubrimientos que transformarán nuestra percepción del mundo matemático. ¡Comencemos este viaje hacia la comprensión más profunda de las funciones y su comportamiento!

3.1 Límite de funciones

Pretendemos esclarecer la idea de límite de una función. Haremos hincapié en el concepto, pues el cálculo matemático requiere el conocimiento de diversas herramientas que no entraremos a contar en detalle, utilizando algún programa de cálculo para ello. Para entender el concepto de límite veámoslo con un ejemplo. Consideremos la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

Cuyo conjunto de definición (dominio) es el conjunto de los números reales no negativos excepto x=1, es decir: D={x□R/x≥0,x≠1}

Si realizamos su representación gráfica:

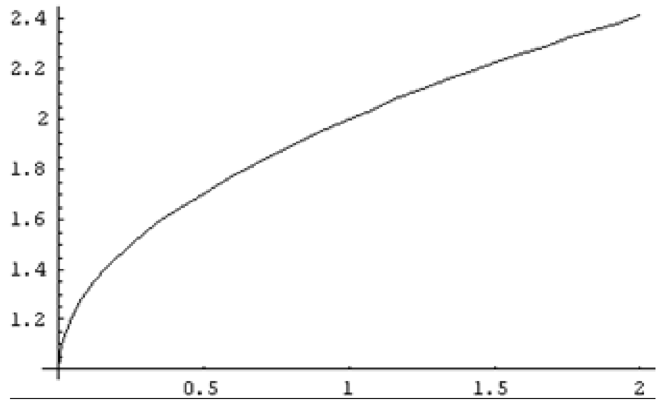
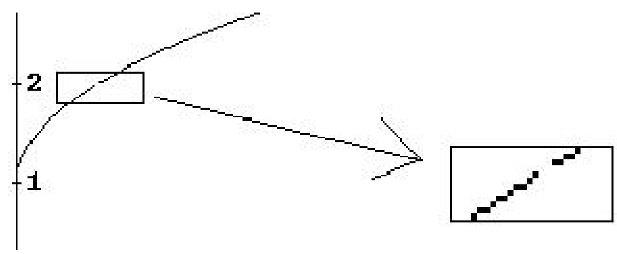


Figura 32 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Para x=1, el dibujo hace un pequeño salto, que no se aprecia en la figura pero que sería tal y como puede verse a continuación:



Como veremos en el apartado siguiente ello implicará una discontinuidad de la función en x=1. Ahora nos preguntamos: cuando el valor de x es muy cercano a 1, ¿cuánto vale la función? Es claro que en x=1 la función no está definida; por lo tanto, tendremos que dar un método que sea capaz de responder a la cuestión anterior, la cual podemos plantearla en los términos siguientes: Si x tiende a 1 ¿a cuánto tiende la función?
A esto es lo que llamaremos límite de la función f(x) cuando x tiende a 1 y lo denotaremos como:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = L$$

3.1.1 Definición informal de límite

Sea f(x) una función, si las imágenes se aproximan suficientemente a un valor L, cuando los valores de x se aproximan suficientemente a un valor b, decimos que el límite de f(x) cuando x tiende a b es igual a L y escribimos: (lim)┬(x→b) f(x)=L

Siendo L el valor de dicho límite, el cual queremos calcular; para ello, observemos que a la hora de aproximarnos a lo largo del eje de abscisas al punto x=1 lo podemos hacer por la derecha y por la izquierda, es decir, podemos considerar (siempre para puntos cercanos a 1). A estos límites los llamaremos **límites laterales.**

$\lim_{x \to b^+} f(x)$ se llama límite lateral por la derecha.

$\lim_{x \to b^-} f(x)$ se llama límite lateral por la izquierda.

Para que **el límite exista** debe cumplir que el límite por la izquierda y por la derecha **sean iguales**, de lo contrario diremos que el límite **no existe** en dicho punto, es decir:

$\lim_{x \to b} f(x) = L$, si y solamente si: $\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

Ejemplo 1: Sea $f(x) = \begin{cases} 4 - x & si \quad x < 1 \\ 4x - x^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ Hallar $\lim_{x \to 1} f(x)$

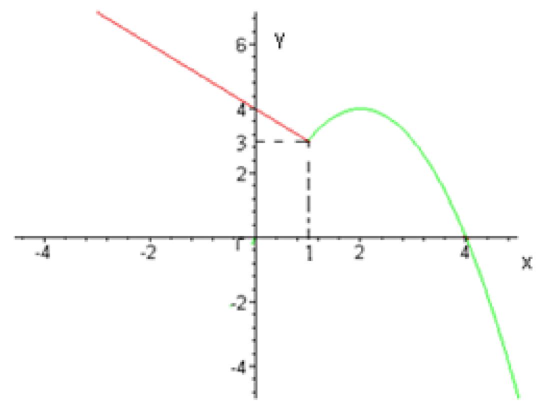


Figura 34 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Solución:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (4 - x) = 4 - 1 = 3$ (Acercamiento por la izquierda)

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - x^2) = 4 - 1 = 3$ (Acercamiento por la derecha)

Entonces: $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

Ejemplo 2: Determinar, si existe, el límite de la siguiente función en los puntos $x = 2$ y $x = 0$: $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Solución: Calculemos: $\lim_{x \to 2} f(x)$

Si determinamos el valor de la función en dicho punto tenemos: $f(2) = \frac{1}{-1+\sqrt{2}}$

y podemos observar en la gráfica de la función como existen los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{-1 + \sqrt{2}}$$

con lo cual tenemos que: $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{-1+\sqrt{2}}$

Para el segundo punto, calculemos: $\lim_{x \to 0} f(x)$

En este caso, los límites laterales no coinciden, ya que no existe el límite lateral por la **izquierda** de la función (no podemos evaluar **f** en puntos a la izquierda de cero). El límite lateral por la derecha si existe y equivale: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, por lo tanto, el límite pedido **no existe.**

En general, para que una función posea en un punto un límite, dicho punto ha de ser tal que puntos a su izquierda y a su derecha han de pertenecer al dominio de la función. Además, la función no tiene porqué existir en dicho punto.

A tener en cuenta: Sabemos que “el infinito” **no es un número**, sino un símbolo que expresa un número muy grande, de tal manera que cualquier otro número real verifica ser menor que él. Cuando se define el límite como un número real, si en el cálculo de dicho límite no se obtiene un número real (el infinito no lo es) resultará que el límite **no existe.** En los dos ejemplos siguientes puede observar dos casos en los que el límite no existe pero que son casos distintos, ya que en el primero los límites laterales coinciden y valen infinito, mientras que en el segundo los laterales no coinciden.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Observando la representación gráfica de las funciones se entienden los resultados obtenidos:

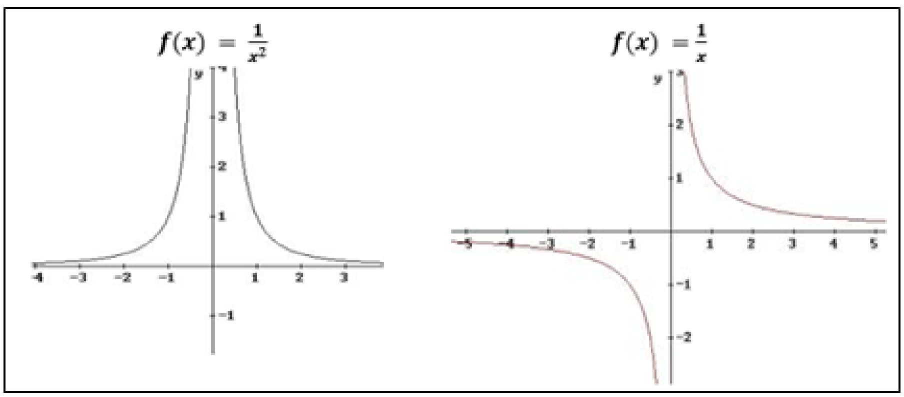


Figura 35 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

3.1.3 Definición formal de límite

Se dice que la función $f(x)$ tiene como límite el número L, cuando x tiende a c, si fijado un número real positivo ε, mayor que cero, existe un numero positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x distintos de c que cumplen la condición $|x - c| < \delta$, se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\;\delta > 0 \quad | \quad 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

Ejemplo: Utilicemos la definición para demostrar que $\lim_{x\to 2}(4x - 5) = 3$
Como la función está definida en todo intervalo abierto que contiene a 2, entonces podemos utilizar la definición para hacer la demostración.

Se debe demostrar que para cualquier ε>0 existe una δ>0 tal que

Si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(4x - 5) - 3| < \varepsilon$ (A)

Si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|4x - 8| < \varepsilon$

Si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $4|x - 2| < \varepsilon$

Si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|x - 2| < \varepsilon/4$

Entonces, si tomamos δ = $\varepsilon/4$ se cumple la proposición (A). Esto demuestra que $\lim_{x\to 2}(4x-5)=3$

3.1.4 Propiedades de límites

Sean b, c, n, A y B números reales, sean f y g funciones tales que:

$\lim_{x\to c} f(x) = A, \lim_{x\to c} g(x) = B$ Entonces:

1. $\lim_{x\to c} b = b$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} b.f(x) = bA$
4. $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = A+B$
5. $\lim_{x\to c}[f(x).g(x)] = A.B$
6. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$
7. $\lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to c} f(x)}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{k} = 0$ (K es constante)
9. $\lim_{x\to 0}\frac{k}{x} = noexiste(\pm\infty)$
10. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x^n} = 0, n \neq 0$
11. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{k} = noexiste(\pm\infty)$

3.2 Cálculo de límites

3.2.1 Límites de funciones polinómicas

Sea $f(x)=3x^3 - 2x^2 + x - 2$, la gráfica de una función polinómica (o polinomio) tiene un trazo continuo, por lo cual podemos afirmar:
Sea f un polinomio, entonces para cualquier número real c se tiene que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ es decir, que el límite en cualquier punto c de su dominio se halla simplemente calculando su imagen.

Ejemplo:
Para la función anterior

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 3(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) - 2 = -3 - 2 - 1 - 2 = -8 = f(-1)$$

3.2.2 Límites de funciones no polinómicas

Si al evaluar el límite en forma directa (sustituir el valor del punto en la función), se obtiene una expresión de la forma $\frac{k}{0}, k \neq 0$ convendrá calcular los límites laterales; si son iguales la función tiene límite, en caso contrario el límite no existe.

Cuando se presenten funciones con valor absoluto o funciones a trozos también es conveniente calcular los límites laterales.

Si al evaluar el límite en forma directa (sustituir el valor del punto en la función), se obtiene una expresión de la forma 0/0,∞-∞,0.∞,0^0,∞^0,1^∞ (indeterminación) entonces debemos realizar procedimientos algebraicos para suprimir la indeterminación.

Una indeterminación no significa que el límite no exista o no se pueda determinar, sino que la aplicación de las propiedades de los límites tal como las hemos enunciado no son válidas.
En estos casos hay que efectuar operaciones particulares para resolver cada una de las indeterminaciones.

3.2.4.1 Indeterminación $\frac{0}{0}$

Cuando solo aparecen funciones racionales (polinomios en el numerador y denominador), basta con descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

Para eliminar la indeterminación, factorizamos el numerador y el denominador, simplificamos y resolvemos el límite obtenido, así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

En aquellos casos en que aparecen funciones irracionales (radicales), basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{2x-2} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(2x-2)(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{2(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)} \right) = \frac{1}{4}$$

3.2.4.2 Indeterminación $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

En la mayoría de los casos basta con dividir el numerador y denominador por la mayor potencia de la variable del denominador. También se pueden utilizar teoremas como:

$$f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots+a_1x+a_o}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots\ldots+b_1x+b_o}$$

- Si $n < m$ entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$
- Si $n = m$ entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{a_n}{b_m}$
- Si $n > m$ entonces: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-1}{x^2+1}$

Dividimos por la variable de mayor grado del denominador, x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+0-0}{1+0}=\frac{4}{1}=4$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-1}{x^2+1}=4$

Ejemplo 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x}}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1}+0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x}=1$

3.2.4.3 Indeterminación

∞-∞. En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\infty-\infty$

Realizamos la diferencia:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-(x+2)}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-2}{x^2-4}\right)=\frac{-2}{\pm 0}$$

Hay que hacer límites laterales:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{-2}{x^2-4}\right) & =\frac{-2}{-0}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{-2}{x^2-4}\right) & =\frac{-2}{+0}=-\infty\end{cases}+\infty\neq-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\boldsymbol{No\ existe}$$

En otros casos, sobre todo en aquellos en que aparecen raíces cuadradas, basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada (es decir, racionalizar).

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\frac{-\infty}{+\infty}$$

Hemos transformado el límite en otro indeterminado de la forma (-∞)/(+∞) que se resuelve dividiendo el numerador y el denominador entre x, así:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=-\frac{1}{2}$

3.2.4.4 Indeterminación 0∞.

En la mayoría de los casos basta con efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo: $\lim_{x\to 3}\left((x-3).\frac{1}{x^2-9}\right)=0.(\pm\infty)$

Realizamos el producto y en este caso llegamos a otra indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{6}$$

3.2.4.5 Indeterminación $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

Para determinar estos límites tendremos en cuenta que:

$f(x)^{g(x)}=e^{Ln\left[f(x)^{g(x)}\right]}=e^{g(x)Ln(f(x))}$, de donde resulta que:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}[g(x)Ln(f(x))]}$$

Pudiendo aparecer otras indeterminaciones, que resolveremos por los métodos anteriores o por métodos que aprenderemos en temas posteriores.
Si al calcular el límite de la función aparece una **indeterminación del tipo** 1^∞ debemos tener en cuenta que: $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$

3.2.3 Límites trigonométricos

Un límite básico relacionado con la trigonometría es el siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

A partir de este resultado podemos resolver límites como:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$ **2.** $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$ **3.** $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = k$

No olvidar que para resolver los límites trigonométricos debemos de conocer también las identidades trigonométricas.

Ejemplo: Calcular $\lim_{t\to 0}\frac{t+\tan t}{\operatorname{sen} t}$

Es conveniente convertir la tangente en su correspondiente expresión en términos de seno y coseno, tenemos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t+\tan t}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{t+\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{\operatorname{sen} t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cos t+\operatorname{sen} t}{\cos t}}{\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cos t+\operatorname{sen} t}{\cos t\operatorname{sen} t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{\cos t\operatorname{sen} t} + \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t\operatorname{sen} t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen} t} + \lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos t} = 1+1 = 2$$

Entonces obtenemos que $\lim_{t\to 0}\frac{t+\tan t}{\operatorname{sen} t} = 2$

Nota: En este ejemplo se utilizó $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen} t} = 1$

3.2.4 Limites infinitos

3.2.4.1 Asíntotas verticales

◈ ***Definición 1.*** Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en $x=a$. Entonces: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como deseemos) al elegir un x suficientemente cerca de a (pero no igual a a). En estos casos la gráfica presenta una **asíntota vertical** en $f=a$ (recta paralela al eje y por la cual no cruza la gráfica),

◈ **Definición 2.** Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en x=a. Entonces: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente negativos (tan pequeños como deseemos) al elegir un x suficientemente cerca de a (pero no igual a a). En estos casos la gráfica presenta una asíntota vertical en $x = a$ (recta paralela al eje y por la cual no cruza la gráfica).

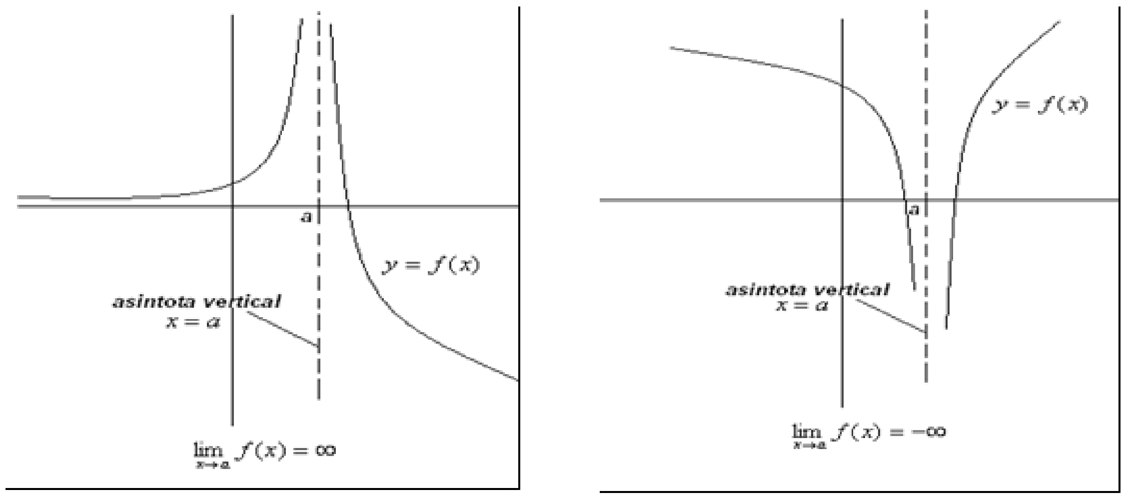


Figura 36 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

◈ **Definición 3.** La recta x=a se llama **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si se cumple una de las siguientes proposiciones:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

3.2.5 Límites al infinito

Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞), entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como deseemos, si escogemos un x suficientemente grande.

3.2.4.1 Asíntotas horizontales

◈ **Definición.** La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si se satisface una de las dos expresiones: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

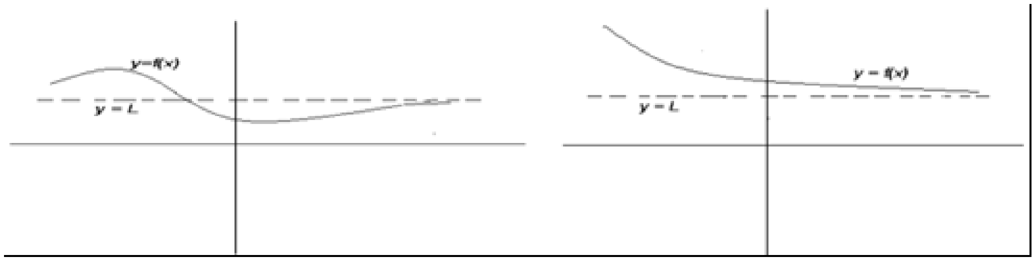


Figura 37 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

De lo anterior podemos concluir que una función racional presenta una **asíntota horizontal** si el grado del **numerador** es **menor o igual** que el grado del denominador.

Ejemplo: $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Si calculamos: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ obtenemos como resultado 1, lo cual significa que la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y=1$, veamos esta situación en el siguiente dibujo:

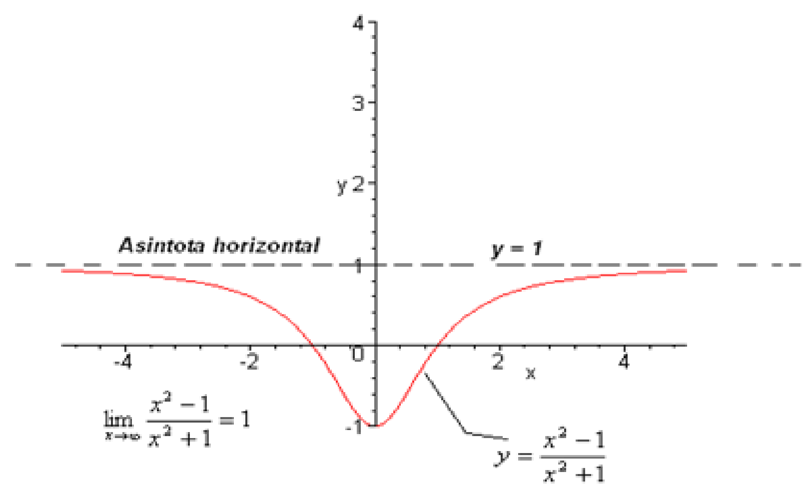


Figura 38 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

3.2.4.2 Asíntotas oblicuas

◈ **Definición.** Sea $f(x)$ una función racional, si el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, entonces la gráfica de f presenta una asíntota oblicua, esta se halla realizando la división indicada en la función.

Ejemplo: Sea $f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$

Esta función tiene una asíntota oblicua, hallémosla:

Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Veamos la gráfica:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 3 & 2x-4 \\ \hline
-x^2 + 2x & \frac{1}{2}x+1 \\ \hline
2x - 3 & \\
-2x+4 & \\ \hline
1 &
\end{array}
$$

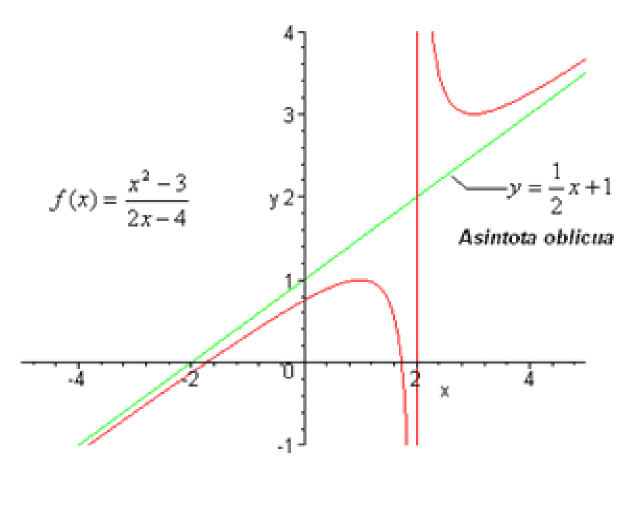


Figura 36 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Nótese que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{2x-4} = \infty$ y además $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2x-4} = -\infty$

3.3 Continuidad de una función

Estudiaremos una característica importante de las funciones como lo es su continuidad, tanto en forma gráfica como de manera analítica.
Intuitivamente, una función es continua en un punto si a pequeños cambios en la variable independiente, x, se producen pequeños cambios en la variable dependiente, y. Gráficamente, se observan claramente, pues son gráficas que se dibujan de un trazo, sin levantar el lápiz del papel. Matemáticamente, la definición es la siguiente.

Definición: Sea f una función, decimos que f es continua en un punto $x=c$ si se satisfacen tres propiedades:

1. f está definida en c, es decir, $f(c)$ existe, o, $f(c) \in Dom(f(x))$.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

El concepto de continuidad en un punto se generaliza a un subconjunto, de forma que se dice que f es continua en un intervalo abierto (a,b) si es continua en todos los puntos de dicho intervalo. Además, es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ si es continua en (a,b) y es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.
Podemos observar que, en la práctica, el estudio de la continuidad conlleva el cálculo de límites, cuestión que, como vimos en el apartado anterior, necesitará la ayuda de algún programa de cálculo. Cuando una función no es continua en un punto diremos que es discontinua en dicho punto, A continuación, estudiaremos los tipos de discontinuidad.

3.3.1 Clases de discontinuidad

Si cualquiera de las tres condiciones de Continuidad falla decimos que la función es **discontinua.**

3.3.4.1 Discontinuidad evitable

Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando **existe límite** en él y no coincide con el valor de la función en el mismo. Gráficamente se reconoce esta discontinuidad si la función posee un hueco o un quiebre. El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama **verdadero valor** de la función en el punto. En este caso la función se puede redefinir para que sea continua, es decir la discontinuidad se puede reparar. Toda función **discontinua evitable** es **reparable**.
Para evitar la discontinuidad de la función definimos una nueva a partir de la que tenemos, de la siguiente manera:

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$, es decir, definimos la nueva función igual que la función que tenemos en todos los puntos donde no hay problema y en el punto donde presenta la discontinuidad le asignamos el valor del límite.

Ejemplo: Hallar el verdadero valor de la función $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$ en el punto $x = 3$, para que la función sea continua en todos sus puntos.
Si observamos la función, resulta que no está definida en el punto x=3, pero si calculamos el límite de la función en ese punto, obtenemos:
$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x-2) = 3-2 = 1$ que sería el verdadero valor de la función en ese punto. La nueva función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & si \quad x \neq 3 \\ 1 & si \quad x = 3 \end{cases}$$

, sería continua en el punto $x = 3$.

3.3.4.1 Discontinuidad evitable

Una función tiene una **discontinuidad inevitable** en un punto cuando no existe límite de la función en dicho punto. En este caso, debido a la imposibilidad de hacerla continua decimos que la discontinuidad es Irreparable. Gráficamente se reconoce esta discontinuidad si la función presenta un salto o separación. Debe observarse que, para clasificar una discontinuidad en una función, es de primordial importancia el cálculo del límite de la función puesto que si éste existe la función se puede reparar (evitable); en cambio, si no existe, la discontinuidad es irreparable (esencial).
Ejemplo 1:

La función: $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ no es continua en el punto $x = 1$ ya que la función no existe en dicho punto pero el límite si existe y tiene un valor de 2 (**compruébelo**).

La función es discontinua **evitable** en $x = 1$ por existir el límite, sin embargo la función si es continua en cualquier otro punto de su dominio.

Figura 40 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Ejemplo 2:

Analice la continuidad de f(x), si:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \;\; x \leq 0 \\ Log x & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

Solución:

1. $f(0) = 0^2 = 0$
2. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} log(x) = -\infty$

   $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

   $\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \text{No existe.}$
3. $f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$

La función no es continua en el punto $x = 0$, pero ahora por otra razón al ejemplo anterior: no existe el límite de la función en dicho punto (no coinciden los límites laterales en cero). La función es **discontinua inevitable** en $x = 0$ porque no existe el límite.

Figura 41 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Ejemplo 2:

Analice la continuidad de f(x), si:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \;\; x = 2 \\ x^2 & si \;\; x \neq 2 \end{cases}$$

Solución:

1. $f(2) = 2$
2. $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$
3. $f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$

La función no es continua en el punto $x = 2$, ya que si bien existe la función en el punto y existe el límite, ambas cantidades no coinciden. La función es **discontinua evitable** en $x = 2$.

Figura 42 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

4. UNIDAD 4. DERIVADAS

¡Bienvenidos a la Unidad 4, donde nos sumergiremos en el apasionante mundo de las derivadas! Este capítulo marca un hito importante en nuestro viaje matemático, ya que exploraremos cómo las derivadas nos brindan herramientas poderosas para entender cómo cambian las funciones en distintos puntos y analizar la tasa de cambio instantáneo.

Desvelando cambios infinitesimales con derivadas. En esta unidad, nos adentraremos en el concepto fundamental de derivada, que nos permite capturar cambios infinitesimales en una función. Exploraremos cómo la derivada en un punto específico revela la velocidad con la que la función está cambiando en ese instante, proporcionándonos una comprensión más profunda de su comportamiento dinámico.

Aplicaciones en la modelización y optimización. Descubriremos cómo las derivadas encuentran su aplicación en la modelización de fenómenos naturales, como el movimiento de partículas, y en problemas de optimización, donde buscamos maximizar o minimizar ciertas cantidades. Estas herramientas se convierten en aliadas cruciales en campos que van desde la física y la economía hasta la ingeniería.

Construyendo puentes entre gráficas y comportamientos dinámico. Veremos cómo las derivadas crean puentes entre las gráficas de las funciones y sus comportamientos dinámicos. La pendiente de la tangente en un punto, expresada por la derivada, nos ofrece una visión detallada de cómo la función responde a cambios locales, desvelando detalles sutiles que escapan a una simple observación.

Prepárense para desafíos analíticos y aplicaciones prácticas. Con esta unidad, nos embarcamos en un viaje analítico fascinante donde las derivadas se convierten en herramientas esenciales para comprender la esencia misma de las funciones matemáticas. Prepárense para desafíos analíticos estimulantes y aplicaciones prácticas que transformarán la manera en que percibimos y analizamos las relaciones matemáticas. ¡Comencemos a explorar las derivadas y desvelar los misterios del cambio infinitesimal en nuestras funciones!

4.1 Conceptos previos

- **Recta secante:** Es la línea que intercepta la curva en dos o más puntos (Ver figura abajo).
- **Recta tangente** a una curva en un punto P de la misma: Es la línea resultante de la posición límite de las líneas secantes $\overline{PQ}$, siendo Q un punto de la curva acercándose al punto P, ya sea por la derecha o por la izquierda (Ver figura abajo).

◈ **Pendiente de una curva** en un punto P de la misma: Es la pendiente, en caso de que exista, de la línea tangente a la curva en el punto P; $m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es: $m = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

◈ **Derivada de una función** $y = f(x)$: Es la función denotada por $f'(x)$ o por y', definida por: $f'(x) = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, siempre que el límite exista. Geométricamente representa la pendiente de la **línea tangente** a la curva en cualquier punto de la misma.

◈ **Formas de representar la derivada de una función:** $y = f(x)$; y'; $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{df(x)}{dx}$; $D_x y$; $D_x[f(x)]$.

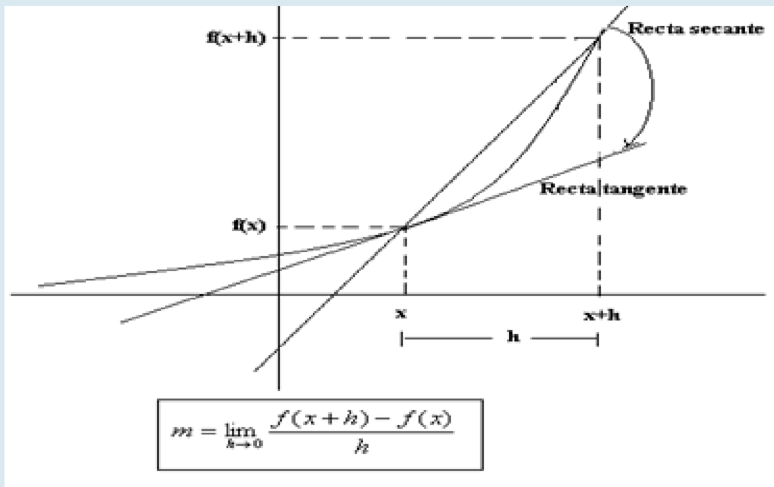


Figura 43 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

La derivabilidad implica la continuidad (aunque no al revés) es decir si $f(x)$ es derivable en un punto a, entonces es continua en dicho punto.
Esto es equivalente a: “Si $f(x)$ no es continua en un punto a entonces no puede ser derivable en dicho punto”.

4.2 Derivadas laterales

Como la derivada de una función es un límite y teniendo presente que, en algunas ocasiones los límites no existen, aunque si sus límites laterales, se pueden dar las siguientes definiciones:

◈ Se llama derivada lateral de $f(x)$ a la izquierda de a, al límite, cuando existe y es finito:

$$f'(a^-) = \lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

◈ Se llama derivada lateral de $f(x)$ a la derecha de a, al límite, cuando existe y es finito:

Una función es derivable en un punto si existen las derivadas laterales y éstas coinciden.

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

4.3 La derivada como razón de cambio

Definición:

$$Si \;\; y = f(x) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} & \text{es la razón de cambio promedio de } y \text{ con respecto a } x \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} & \text{es la razón de cambio instantánea de } y \text{ con respecto a } x \end{cases}$$

La razón de cambio instantánea se abrevia simplemente como **razón de cambio** $f'(x)$= $y' = \frac{dy}{dx}$, y representa aproximadamente el cambio de y por cada cambio unitario en x.

Ejemplo 1: Halle la derivada de $y=x^2$ en $x=2$

$$y' = \frac{d(x^2)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Entonces $y' = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$

En $x=2$ la derivada es: $2(2) = 4$

Ejemplo 2: La derivada de $y = x^3$ es:

$$y' = \frac{d(x^3)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

Entonces $y' = \frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$

Ejemplo 3: Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x)=√x en el punto (4,2)

En primer lugar, hallemos la pendiente de la recta tangente usando límites:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Ahora hallemos la ecuación de la recta con la expresión: $y = m(x - x_0) + y_0$

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

Solución: $y = \frac{1}{4}x + 1$

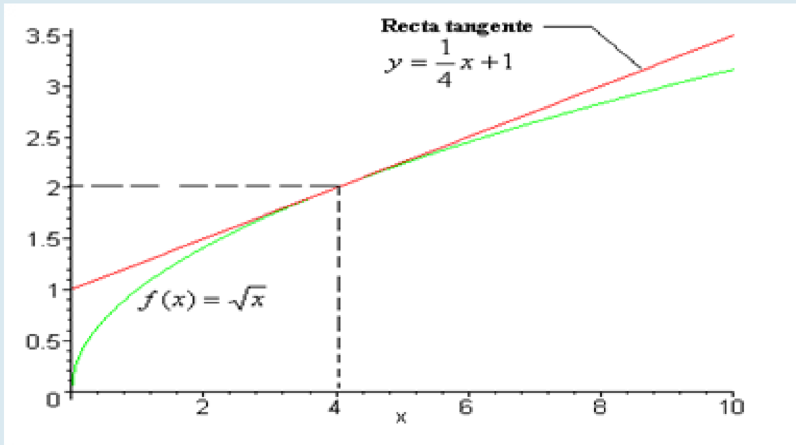


Figura 44 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

4.4 Propiedades o reglas de derivación

Sea $u = f(x), v = g(x)$ funciones cuya derivada existe; c y n son constantes, entonces:

• Si $y = c \to y' = 0$	• Si $y = x \to y' = 1$	• Si $y = cx \to y' = c$
• Si $y = x^n \to y' = nx^{n-1}$	• Si $y = cu \to y' = cu'$	• Si $y = u \pm v \to y' = u' \pm v'$
• Si $y = uv \to y' = vu' + uv'$	• Si $y = \frac{u}{v} \to y' = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}$	• Si $y = \ln u \to y' = \frac{u'}{u}$ x
• Si $y = e^u \to y' = u'e^u$	• Si $y = \lvert u \rvert \to y' = \frac{u}{\lvert u \rvert}u'$	• Si $y = \lvert u \rvert \to y' = \frac{u}{\lvert u \rvert}u'$

Tabla 4. Elaborado por Elkin Vaquero.

Ejemplos:

- $y = 2x^3 - 5x^2 + 7$

$$y' = 2(3x^2) - 5(2x) + 0 = 6x^2 - 10x$$

- $y = 3 + \sqrt[3]{x} = 3 + x^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

- $g(x) = 5\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$g(x) = 5x^{1/2} - \frac{3}{x^{1/2}} + \frac{4}{x^{2/3}} = 5x^{1/2} - 3x^{-1/2} + 4x^{-2/3}$$

Ejemplos:

$$g'(x) = 5\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 4\left(-\frac{2}{3}x^{-5/3}\right) = \frac{5}{2x^{1/2}} + \frac{3}{2x^{3/2}} - \frac{2}{3x^{5/3}}$$

$$g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x^2+5}{2x-7}}$

$$f'(x) = \frac{(2x-7)D_x(3x^2+5) - (3x^2+5)D_x(2x-7)}{(2x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-7)(6x) - (3x^2+5)(2)}{(2x-7)^2} = \frac{12x^2 - 42x - 6x^2 - 10}{(2x-7)^2} = \frac{6x^2 - 42x - 10}{(2x-7)^2}$$

- $\boldsymbol{y = \frac{ln\, x}{x^2+3}}$

$$y' = \frac{(x^2+3)\left(\frac{1}{x}\right) - ln\, x\,(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{x + \frac{3}{x} - 2x\, ln\, x}{(x^2+3)^2}$$

- $\boldsymbol{f(x) = e^{x^5-4x^3}}$

$$f'(x) = e^{x^5-4x^3}(5x^4 - 12x^2) = x^2(5x^2-12)e^{x^5-4x^3}$$

4.5 Regla de la cadena

Si $\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{u}$) es derivable en u = $\boldsymbol{g}$ ($\boldsymbol{x}$) y g($\boldsymbol{x}$) derivable en $\boldsymbol{x}$, entonces la función compuesta ($\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$)_(($\boldsymbol{x}$)) = $\boldsymbol{f}$ ($\boldsymbol{g}$($\boldsymbol{x}$)) es derivable en $\boldsymbol{x}$. Además:

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'_{(x)} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})).\, \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

Usando la notación de Leibniz, si y=f(u),u=g(x) entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

4.5.1 Regla de la cadena para potencias

Si $\boldsymbol{u}(x)$ es una función derivable entonces:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

- Sea $\boldsymbol{y = (3x^2 - x + 1)^4}$ halle su derivada

$$y' = 4(3x^2 - x + 1)^3(3x - 1)$$

- Sea $\boldsymbol{y = \sqrt{x^3 + x}}$ calcule $\frac{dy}{dx}$

$$y = \sqrt{x^3 + x} = (x^3 + x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 + x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 1) = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$$

4.6 Derivada de funciones trigonométricas

4.6.1 Derivada de sen(x)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{d}{dx}[sen(x)]} &= \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)\cos(h) + sen(h)\cos(x) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h) - 1) + sen(h)\cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sen(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{sen(h)\cos(x)}{h} \\
&= sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h} = sen(x)(0) + \cos(x)(1) = \boldsymbol{\cos(x)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d}{dx}sen(x) = \cos(x)}$$

4.6.2 Derivada de cos(x)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\frac{d}{dx}[\cos(x)]} &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h) - sen(h)sen(x) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)(\cos(h) - 1}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{sen(h)sen(x)}{h} \\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h) - 1}{h} - sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h} = \cos(x)(0) - sen(x)(1) = \boldsymbol{-sen(x)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d}{dx}\cos(x) = -sen(x)}$$

Para obtener las demás derivadas no es necesario usar límites ya que empleamos las identidades que involucran a seno y a coseno.

4.6.3 Derivada de tan(x)

$$\frac{d}{dx}tan(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{sen(x)}{cos(x)}\right] = \frac{cos(x)\,cos(x) - (-sen(x))sen(x)}{(cos(x))^2} = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{(cos(x))^2} = \frac{1}{cos^2(x)}$$
$$= sec^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}tan(x) = sec^2(x)$$

Se puede usar este mismo procedimiento para probar las siguientes derivadas:

$$\frac{d}{dx}cot(x) = -csc^2(x) \qquad \frac{d}{dx}sec(x) = sec(x)\,tan(x) \qquad \frac{d}{dx}csc(x) = -csc(x)\,cot(x)$$

4.6.4 Derivadas de funciones trigonométricas compuestas

$\frac{d}{dx}sen(u) = cos(u)\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}cos(u) = -sen(u)\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}tan(u) = sec^2(u)\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}cot(u) = -csc^2(u)\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}sec(u) = sec(u)\,tan(u)\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}csc(u) = -csc(u)\,cot(u)\frac{du}{dx}$

Tabla 5. Elaborado por Elkin Vaquero.

Ejemplos:

- Derive $y = sen(x^2)$

$$y' = cos(x^2)\cdot 2x = 2x\,cos(x^2)$$

- Derive $y = sen\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

$$y' = cos\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}cos\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$$

4.7 Derivación implícita

Una función $f(x)$ está definida implícitamente por una ecuación si y solo si al sustituir y por $f(x)$ se llega a una identidad.

Ejemplos

La ecuación $y^2 = x$ define dos funciones implícitamente, ellas son:

$$y = f(x) = \sqrt{x} \qquad y = f(x) = -\sqrt{x}$$

Para hallar $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ debemos derivar implícitamente la ecuación $y^2 = x$, en primer lugar, vamos a sustituir y por $f(x)$ en la ecuación, así:
$[f(x)]^2 = x$, ahora derivamos en ambos miembros con respecto a x y usamos la regla de la cadena en el miembro izquierdo:

$$2f(x)f'(x) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2y}$$

- Suponga que $y^3 + 7y = x^3$ define a y como una función implícita de x, halle $\frac{dy}{dx}$

Derivando en ambos miembros:

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2+7) = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2+7}$$

4.7.1 Derivada de una función elevada a otra función

También se conoce como la derivada de la función exponencial compuesta, se puede representar de la forma:

$$y = U^V$$

Para hallar su derivada podemos usar la formula. Otra forma de derivarla es por medio del logaritmo natural. Se aplica a los dos lados de la expresión logaritmo natural para por medio de propiedades de logaritmos bajar la función del exponente y posteriormente derivar cada lado en forma de derivada implícita, para luego despejar y'.

Ejemplos:

- Derivar $y = x^x$

$$Lny = Lnx^x \quad \Rightarrow \quad Lny = xLnx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}y' = 1 \cdot Lnx + \frac{1}{x} \cdot x$$

$$\frac{1}{y}y' = Lnx + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = y(Lnx+1) \quad \Rightarrow \quad y' = x^x(Lnx+1)$$

4.7.1 Derivada de una función elevada a otra función

Sea $y = f(x)$ una función entonces:

- $y' = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$, es la primera derivada o derivada de primer orden.
- $y'' = f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$, es la segunda derivada o derivada de segundo orden.
- $y''' = f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x)$, es la tercera derivada o derivada de tercer orden.
- $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x)$, es la enésima derivada o derivada de orden n

Ejemplos:

◈ Halle todas las derivadas de orden superior para $y = 3x^4+2x^3+x^2-2$

$$y' = 12x^3 + 6x^2 + 2x$$
$$y'' = 36x^2 + 12x + 2$$
$$y''' = 72x + 12$$
$$y^{iv} = 72$$
$$y^{v} = 0$$

◈ Halle la tercera derivada de $y = \frac{1}{x}$

$$y' = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y'' = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad y''' = -6x^{-4}$$

4.9 Razones de cambio relacionadas

¿Cuán rápido varía una cantidad? En general, una razón de cambio con respecto al tiempo es la respuesta a esta pregunta. La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ es una razón de cambio instantánea con respecto a la variable x. Si la función representa posición o distancia entonces la razón de cambio con respecto al tiempo se interpreta como velocidad.

Si dos cantidades están relacionadas entre sí, entonces cuando una de ellas cambia con el tiempo, la otra cambiará también. Por lo tanto, sus razones de cambio (con respecto al tiempo) están relacionadas entre sí. Por ello a este tipo de situaciones se les llama **razones de cambio relacionadas**.
Los problemas de razones de cambio relacionadas se resuelven siguiendo los siguientes pasos:

1. Hacer una ilustración de la situación planteada.
2. Identificar con símbolos las cantidades que varían en el tiempo.
3. Identificar las razones que se conocen y la razón que se busca.
4. Escribir una ecuación que relacione las variables.
5. Derivar implícitamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida en el paso 4.

Ejemplos:

Solución: Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt} = 0,5$$

El costo marginal está dado por:

$$\frac{dC}{dx} = 4 - \frac{1}{10}x$$

Por consiguiente:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(4 - \frac{x}{10}\right)\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo $x = 5$, el nivel de producción actual, obtenemos:

$$\frac{dC}{dt} = \left(4 - \frac{5}{10}\right)(0,5) = 1,75$$

Así que los costos de producción se están incrementando a una tasa de 1,75 por año.

5. UNIDAD 5. APLICACIONES DE LA DERIVADA

¡Damos inicio a la Unidad 5, donde llevaremos las derivadas más allá de su estudio teórico y las aplicaremos a situaciones prácticas! Este capítulo se sumerge en las Aplicaciones de las Derivadas, revelando cómo estas herramientas matemáticas encuentran su utilidad en una variedad de contextos del mundo real.

Desbloqueando el poder de las derivadas en el mundo real. En esta unidad, exploraremos cómo las derivadas, esas herramientas analíticas tan poderosas, tienen aplicaciones prácticas que van más allá de los límites del papel matemático. Veremos cómo las tasas de cambio instantáneo se traducen en la descripción detallada de fenómenos en campos tan diversos como la física, la economía y las ciencias sociales.

Modelización de fenómenos dinámicos y cambios locales. Descubriremos cómo las derivadas se convierten en aliadas en la modelización de fenómenos dinámicos. Analizaremos cómo las tasas de cambio locales permiten entender desde la velocidad de un objeto en movimiento hasta la evolución de una economía en un momento específico.

Optimización: Maximizar, minimizar y encontrar eficiencias. Exploraremos aplicaciones en problemas de optimización, donde las derivadas nos ayudarán a maximizar o minimizar ciertas cantidades. Ya sea buscando la máxima eficiencia en la producción o minimizando costos, las derivadas nos guiarán en la toma de decisiones estratégicas.

Conectando la teoría con el mundo práctico. Esta unidad busca construir un puente sólido entre la teoría matemática y las aplicaciones tangibles. Veremos cómo las ecuaciones diferenciales describen el cambio en sistemas dinámicos y cómo la interpretación de las derivadas en el contexto de la vida real transforma la manera en que abordamos y resolvemos problemas.

Prepárense para aplicaciones con impacto real. A medida que nos sumergimos en este capítulo, prepárense para descubrimientos que cambiarán la percepción de cómo las matemáticas impactan nuestro entendimiento y solución de problemas en el mundo real. ¡Comencemos a aplicar el poder de las derivadas en situaciones prácticas y emocionantes!

Las aplicaciones fundamentales de las derivadas, o de mayor utilidad, son:
- El problema de la recta tangente.
- Representación gráfica de funciones.
- Para optimización.

5.1 El problema de recta tangente

Dada una función $f(x)$, se trata de definir la tangente a la curva en un punto P. Como ya se vio en la interpretación geométrica de la derivada, la derivada de una función en un punto $(x_1 - y_1)$ expresa la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. $m = f'(x) = y'$. Por tanto, la ecuación (punto-pendiente) de la recta tangente a la curva en el punto $P(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto de abscisa $x = 2$

Solución:

La pendiente es el valor de la derivada: $f'(x) = 2x + 1$

Pendiente: $m = f'(2) = 2(2) + 1 = 5$

Ecuación de la recta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Necesitamos las coordenadas del punto: Para $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$; $P(2,7)$

La ecuación de la recta es, por tanto, $y - 7 = 5(x - 2) \Longrightarrow y = 5x - 3$

5.2 Representación gráfica de funciones

5.2.1 La Primera derivada y la gráfica de una función

Utilizaremos el criterio de la primera derivada para analizar dónde una función es creciente o decreciente, calcular sus valores críticos, localizar sus valores máximos y mínimos relativos y esbozar su gráfica.

5.2.4.1 Funciones creciente o decreciente

Sean x_1 y x_2 dos números reales cualesquiera de un intervalo I, siendo $x_1 < x_2$. Se dice que es $f(x)$ creciente en el intervalo I, sí y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$. $f(x)$ creciente en el intervalo I, sí y sólo si $f(x_1) < f(x_2)$.
En la gráfica se puede observar que la función es creciente en $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$, y es decreciente en $(2,4)$.

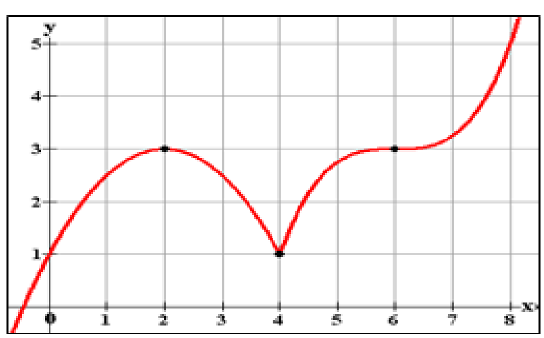


Figura 45 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

5.2.2 Criterios para determinar si una función es creciente o decreciente

Si $f(x)$ es derivable en el intervalo $I=(a,b)$ y si:

- $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo I, entonces $f(x)$ es creciente en dicho intervalo.
- $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo I, entonces $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo.

Ejemplos: Determinar para qué valores de x la función $y = x^2 - 4x + 3$ es creciente o decreciente.
Derivando la función se obtiene:
$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$.

Analizando la derivada, se tiene que:
Si $x < 2$, entonces $f'(x) < 0$, por lo tanto $f(x)$ es decreciente.

En la gráfica se pueden comprobar estos resultados.

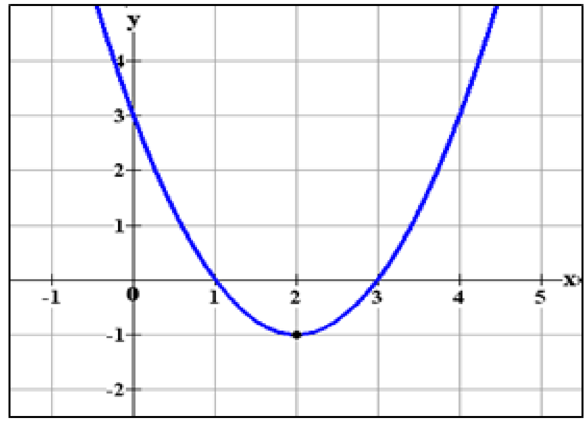


Figura 46 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

5.2.3 Valores críticos

Son los valores de x, dentro del dominio de la función, en donde la derivada es **cero** o en donde la derivada **no existe** (es decir, no está definida).
Haciendo referencia a la **gráfica 1**, $x = 2, x = 4, x = 6$ son valores críticos, porque en el primero y en el tercero la derivada es **cero**, ya que la tangente es horizontal, y en el segundo la derivada **no existe**, ya que existen dos tangentes para un mismo punto. Haciendo referencia a la **gráfica 2**, existe un solo valor crítico: x=2 (ahí la derivada es **cero**).
El punto correspondiente a un valor crítico, en la gráfica de una función, se llama **punto crítico**. En la gráfica 2 el punto $P(2,-1)$ es un punto crítico.

5.2.4 Extremos de una función

Una función puede tener más de un punto de máximo y/o de mínimo.

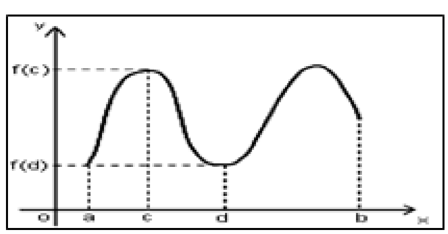


Figura 47 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Los valores extremos pueden ser interiores o extremos del intervalo.
En la siguiente figura c y d no son máximo y mínimo, respectivamente, en $[a,b]$, pero sí en una vecindad.

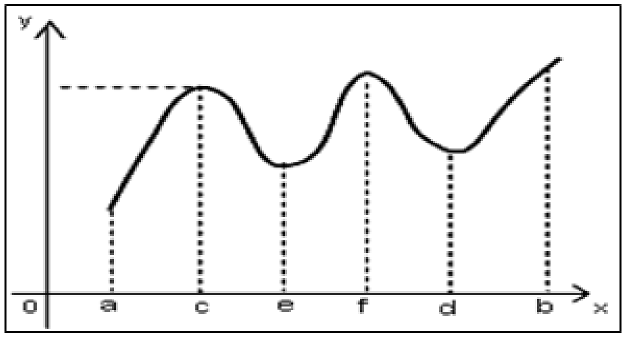


Figura 48 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

5.2.4.1 Extremos locales de una función

Son los valores máximos o mínimos locales de una función dentro de su dominio. Si I es un intervalo abierto (generalmente muy pequeño) que contiene al valor x_0. Se dice que

- $f(x\_0)$ es máximo local o relativo de $f(x)$, sí y sólo si $f(x\_0) \geq f(x)$ para toda x de I.
- $f(x\_0)$ es mínimo local o relativo de $f(x)$, sí y sólo si $f(x\_0) \leq f(x)$ para toda x de I.

Haciendo referencia a la **gráfica** 1, $f(2) = 3$ es máximo relativo, $f(4) = 1$ es mínimo relativo y f (6)=3 no es ni máximo ni mínimo relativo.

5.2.5 Criterio de la primera derivada

Sea f(x) continua en un intervalo abierto que contenga al valor crítico x_0:

- Si la función tiene extremos relativos, necesariamente ocurren en los valores críticos. Haciendo referencia a la gráfica 1, existen extremos relativos en x=2 y en x=4, que son valores críticos de la función.
- Si la derivada de la función cambia de signo al pasar por un valor crítico, necesariamente ahí existe un extremo relativo; si no lo hace, no tiene extremo relativo en ese valor crítico. Haciendo referencia a la gráfica 1, no existe extremo relativo en x=6. Por tanto, no necesariamente en todos los valores críticos de la función existen extremos relativos.
- Si por la izquierda de un valor crítico x_0, la derivada es positiva (es decir, la función es creciente) y por la derecha la derivada es negativa (es decir, la función es decreciente), entonces f(x_0) es un máximo relativo de la función.
- Si por la izquierda de un valor crítico x_0, la derivada es negativa (es decir, la función es decreciente) y por la derecha la derivada es positiva (es decir, la función es creciente), entonces f(x_0) es un mínimo relativo de la función. Haciendo referencia a la gráfica 1, esto se puede constatar.

Con esta información que nos proporciona la primera derivada de una función, se puede hacer un esbozo de la gráfica de la función.

Ejemplos: Hacer un análisis mediante la primera derivada, para bosquejar las grá**ficas** de las siguientes funciones.

◈ $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$. Primero calculamos los valores críticos de la función, por lo cual la derivamos y la factorizamos:

$$y' = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x-3)(x+2)$$

Se observa que la derivada es cero en x=-2 y en x=3, por lo tanto, son **valores críticos**.

Ahora los analizaremos por la izquierda y por la derecha, para ver si la derivada es positiva o negativa y así concluir si la función es creciente o decreciente:

"Si" x<-2," entonces "$f'(x)$=6(-)(-)>0," por lo tanto "$f(x)$" es creciente" .
"Si"-2<x<3," entonces " $f'(x)$=6(-)(+)",por lo tanto "$f(x)$" es decreciente" .
"Si " x>3",entonces " $f'(x)$=6(+)(+)>0",por lo tanto " $f(x)$" es nuevamente creciente" .

Esto se puede visualizar mejor si construimos la siguiente tabla:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
Derivada	+	−	+
Función	Creciente	Decreciente	Creciente

Existe un máximo local o relativo en x = **-2**
Existe un mínimo local o relativo en x= **3**

Si sustituimos estos valores de x en la función original obtenemos respectivamente los valores máximo y mínimo relativos de la función, que son: y=49 y y=-76. Por lo tanto, podemos expresar ahora los puntos máximo y mínimo relativos o locales de la función:

Punto máximo $P(-2,49)$ **Punto mínimo $P(3,-76)$**

Situando estos puntos en el sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones, se puede construir la gráfica de la función. Esta se muestra en la **gráfica 3**), donde se comprueban los resultados del análisis de la función a través de su primera derivada.

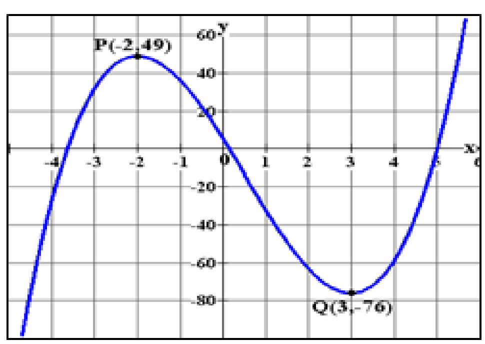


Figura 49 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

◈ $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 54x + 120$

Seguiremos el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior:

$$f'(x) = -2x^2 - 12x + 54 = -2(x^2 + 6x - 27) = -2(x+9)(x-3)$$

La derivada es cero en x=-9 y en x=3, por lo tanto, son valores críticos. Ahora construiremos una tabla similar a la anterior:

	$-2(-)(-) = -$	$-2(-)(+) = +$	$-2(+)(+) = -$
Intervalo	$(-\infty, -9)$	$(-9,3)$	$(3, \infty)$
Derivada	$-$	$+$	$-$
Función	Decreciente	Creciente	Decreciente

Existe un mínimo local o relativo en x = - 9

Existe un máximo local o relativo en x = 3

Los valores mínimo y máximo relativos de la función, que son: y = **-366** y y = **210**. Por lo tanto, los puntos mínimo y máximo relativos o locales de la función son:

Punto mínimo P_m (-9,-366) **Punto máximo P_M (3,210)**

La gráfica de la función se muestra en la gráfica 4, donde se comprueban los resultados de este análisis

Gráfica 4 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 54x + 120$

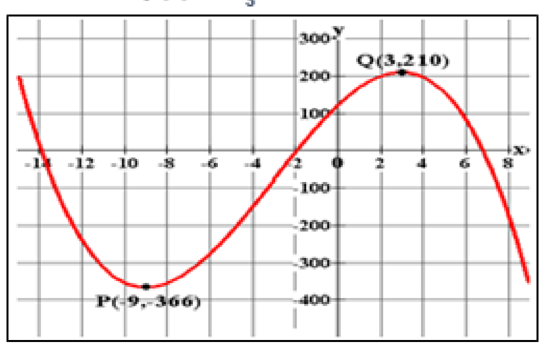


Figura 50 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

5.2.6 Criterio de la segunda derivada

Si $f(x)$ es una función que tiene un valor crítico en $x = a$, tal que $f'(a) = 0$ y $f''(a)$ existe,

Entonces:

$$\text{Si} \begin{cases} f''(a) < 0 \to f(x) \text{ tiene un máximo local o relativo en } x = a \\ f''(a) > 0 \to f(x) \text{ tiene un mínimo local o relativo en } x = a \\ f''(a) = 0 \to \text{no se puede concluir si } f(x) \text{ tiene máximo o mínimo local en } x = a \end{cases}$$

Ejemplo 1: Aplicar el criterio de la segunda derivada para verificar si la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ tiene valores máximos o mínimos relativos.

Solución: Primero localizamos sus valores críticos, es decir los valores de x donde la derivada es cero o donde la derivada no existe:

$f'(f) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x^2 - x - 6) = 6(x - 3)(x + 2)$. Vemos que la derivada existe para todo valor de x, y que existen dos valores de x donde la derivada se hace cero. Por tanto, sus valores críticos son: $x = -2yx = 3$

Como $f'(-2) = 0$" y "$f'(3)=0$, probamos ahora el signo de la segunda derivada para estos valores:

$$f''(x) = 12x - 6$$

$f''(-2) = 12(-2) - 6 = -30$. Al ser negativa existe un máximo relativo o local en $x=-2$.
$f''(3) = 12(3) - 6 = 30$. Al ser positiva existe un mínimo relativo o local en $x=3$.
El valor máximo local de la función es $f(-2)=2(-2)^3-3(-2)^2-36(-2)+7=51$
El valor mínimo local de la función es $f(3)=2(3)^3-3(3)^2-36(3)+7=-74$
Los puntos máximo y mínimo relativos son: $P_{máx}(-2,51);P_{mín}(3,-74)$
Su representación gráfica se puede ver en la siguiente página:

Gráfica 5 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

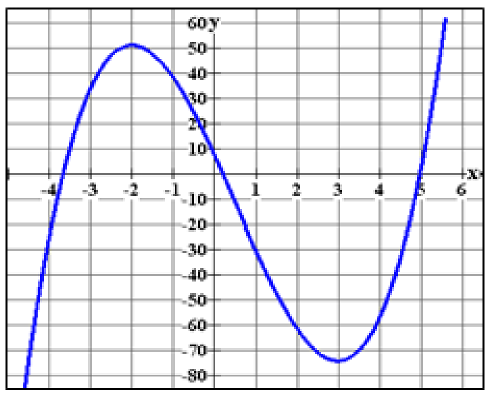


Figura 51 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Ejemplo 2: Aplicar el criterio de la segunda derivada para verificar si la función $f(x) = x^4 - 4$ tiene valores máximos o mínimos relativos.

Solución: $f'(x) = 4x^3$. Como se puede observar, la derivada existe para todo valor de x, y es cero cuando x toma el valor de cero. Por lo tanto, tiene un sólo valor crítico $x = 0$. Veamos ahora cómo es el signo de la segunda derivada en este valor crítico.
$f''(x) = 12x^2$.

Como $f''(0) = 12(0)^2 = 0$, entonces no se puede concluir si existe o no máximo o mínimo relativo en $x = 0$. Así pues, para saber si existe o no máximo o mínimo local tenemos que utilizar el criterio de la primera derivada:

I	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, \infty)$, luego existe un mínimo relativo o local en $x = 0$ El valor mínimo es $f(0) = (0)^2 - 4 = -4$.
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	Decreciente	Creciente	

El punto mínimo es $P\,(0,-4)$.
Su representación gráfica se puede ver en la siguiente gráfica:

Gráfica 6 $f(x) = x^4 - 4$

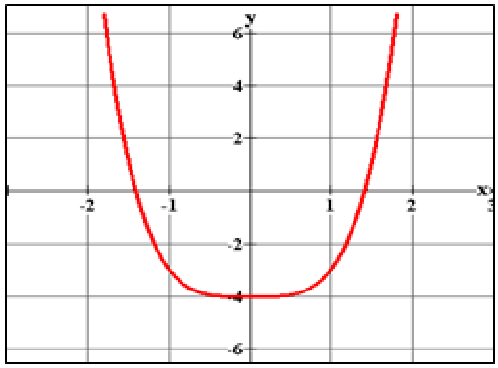


Figura 52 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Los puntos de análisis previos a la representación gráfica de una función son:

- Dominio
- Continuidad
- Puntos de corte con los ejes coordenados.
- Simetrías
- Asíntotas
- Crecimiento y decrecimiento
- Extremos (máximos y mínimos)
- Curvatura y puntos de inflexión

Tabla de resumen

Definiciones		$aplicar\,a: y = \frac{x}{(x-1)^2}$
Dominio, ***Dom(f)***	Conjunto de valores ***x*** para los que existe la función.	La función no existe cuando el denominador es 0, por tanto: ***Dom(f)=R - {1}***
Discontinuidades	Valores del ***Dom(f)*** para los que la función es discontinua	Para ***x = 1*** la función es discontinua, porque el límite cuando ***x tiende a 1*** es infinito y la función no existe en ***x = 1***
Asíntotas verticales; ***x=a***	Valores del Dom(f) donde $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$ Luego la asíntota vertical: x=1
Asíntotas horizontales; ***y=a***	Donde a se calcula $a = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$	$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = 0$ Luego la asíntota horizontal y=0

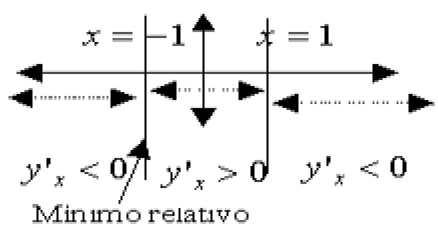
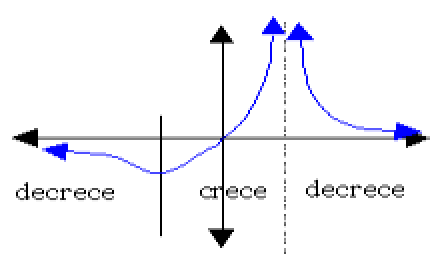
Asíntotas oblicuas; rectas de ecuación: ***y = m x +b***	$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$	$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x(x-1)^2} = 0$ $b = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{(x-1)^2} - 0x\right] = 0$
Puntos de corte con el eje ***X***	Son las soluciones de la ecuación: ***f(x)=0***	$\frac{x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0; y = 0$
Puntos de corte con el eje ***Y***	Valores que toma la función cuando ***x=0***	***x = 0; y=0***
Máximos y mínimos relativos	Soluciones de la ecuación: ***f'(x)=0***. Cada caso se estudiará según el apartado siguiente.	$y'(x) = \frac{-x^2+1}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ Para x=1, la función no existe Para x= -1 $y = \frac{-1}{(-1-1)^2} = -0.25$
Regiones de crecimiento o decrecimiento de la función. Con esta información se determina de qué tipo son los puntos en los que la derivada se hace 0.	Las regiones se determinan sobre el eje ***X***, entre los valores para los que la derivada es 0 o no existe.	
Representación gráfica	Se utiliza toda la información que proporciona la tabla	

Tabla 6 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

5.3 Aplicación de la derivada a problemas de optimización

Muchos de los problemas que se presentan en la práctica diariamente, están relacionados de una forma u otra, con encontrar los valores **máximos y mínimos** de una función, y más aún, determinar para qué valores de la variable independiente se alcanzan estos. Estos problemas se llaman, en general, **problemas de optimización**. Se aplican en diferentes contextos, permitiendo resolver problemas de optimización geométricos y económicos entre otros.
En términos generales, un problema de optimización consiste en encontrar el valor mínimo o minimizar, o encontrar el valor máximo o maximizar, una cierta función, de tal forma que satisfagan ciertas condiciones dadas.
La solución o soluciones óptimas son aquellas para las cuales se satisfacen las restricciones del problema y el valor de la función sea mínimo o máximo.
La función que representa el problema de optimización se le llama función objetivo.

5.3.1 Fases en la solución de un problema de optimización

1. Planteamiento del problema.
2. Formulación Matemática (construir la función objetivo si no se da explícitamente).
3. Análisis del comportamiento de la función objetivo (puede incluir su representación gráfica).
4. Obtención de las soluciones.

Ejemplos
◈ Para el producto de un monopolista la función de demanda es x=10,000e^(-0.02p). Calcular el valor de p para el cual se obtiene el ingreso máximo.
Solución

$$I = px = 10{,}000pe^{-0.02p};\, p > 0$$

$$\to I'(x) = 10{,}000[pe^{-0.02p}(0.02) + e^{-0.02p}] = 10{,}000e^{-0.02p}(-0.02p + 1)$$

$I'(x) = \frac{10{,}000(1-0.02p)}{e^{0.02p}} = 0 \to 1 - 0.02p = 0 \to p = \frac{1}{0.02} = \frac{100}{2} = 50$. Único valor crítico en $(0, \infty)$

Como es el único extremo local en (0,∞) es también máximo absoluto en ese intervalo. Por tanto, se obtiene el máximo ingreso con *p* = \$50/unidad.

◈ Una empresa produce mensualmente ***x*** toneladas de un metal precioso con un costo total **C** dado por $C(x) = 10 + 75x - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3$ Evaluar el nivel de producción ***x*** donde el costo marginal alcanza su mínimo.

Solución
Costo marginal $C'(x) = 75 - 10x + x^2$. Esta es la función para la cual queremos obtener un máximo:
$C''(x) = -10 + 2x = 0 \to 2x = 10 \to x = 5$. Único valor crítico en (0,∞).
$C'''(x) = 2 > 0$, luego entonces existe un mínimo local y también absoluto en $x = 5$.
Por lo tanto, para que el ingreso marginal sea mínimo el nivel de producción debe ser de 5 unidades.

◈ Para el producto de un monopolista, la función demanda es $p = \frac{50}{\sqrt{x}}$, y la función de costo promedio es $\bar{C} = 0.50 + \frac{100}{x}$.

a) Evaluar el precio y la producción que maximizan la utilidad.
b) A este nivel, demostrar que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Solución

a) $U = I - C; I = px = \left(\frac{50}{\sqrt{x}}\right)x = 50\sqrt{x}; C = \bar{C}x = \left(0.5 + \frac{100}{x}\right)x = 0.5x + 100.$

$U(x) = 50\sqrt{x} - (0.5x + 100) = 50\sqrt{x} - 0.5x - 100 \rightarrow U'(x) = 25x^{-1/2} - 0.5 = \frac{25}{\sqrt{x}} - 0.5 = 0 \rightarrow \frac{25}{\sqrt{x}} = 0.5.$

$\sqrt{x} = \frac{25}{0.5} = 50 \rightarrow x = 2{,}500$. Único valor crítico en $(0, \infty)$.

$U''(x) = -\frac{25}{2}x^{-3/2} = \frac{-25}{2\sqrt{x^3}} \rightarrow U''(2{,}500) < 0$, luego existe un máximo local y también absoluto en 2,500.

Entonces, para obtener la máxima utilidad posible se deben fabricar y vender 2,500 unidades a un precio de $p = \frac{50}{\sqrt{2{,}500}} = \frac{50}{50}$ =$1/unidad.

b) $I'(x) = 25x^{-1/2} = \frac{25}{\sqrt{x}} \rightarrow I'(2{,}500) = \frac{25}{\sqrt{2{,}500}} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5; C'(x) = 0.5 \rightarrow C'(2{,}500) = 0.5.$

Por lo tanto, el ingreso marginal y el costo marginal son iguales cuando el nivel de producción es de 2,500 unidades, es decir cuando la utilidad es máxima.

◈ Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que puede tener el rectángulo y cuáles son sus dimensiones?

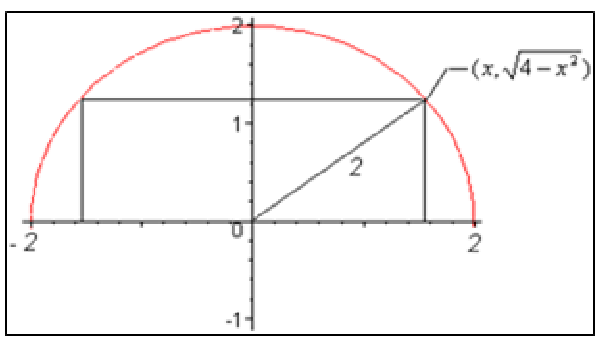


Figura 53 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Según se muestra en la figura tenemos:

Largo del rectángulo: $2x$ Altura: $\sqrt{4 - x^2}$

La función a maximizar es el área del rectángulo, es decir,

$$A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

Hallemos los puntos críticos, derivando e igualando a cero:

$$A(x) = 2x\sqrt{4-x^2} \Longrightarrow A'(x) = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{-2x^2 + 2(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$-2x^2 + 8 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow -4x^2 = -8 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2(\sqrt{2})^2 = 4 \Longrightarrow A(-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})\sqrt{4-2} = -2(\sqrt{2})^2$$
$$= -4(Area\ negativa)$$

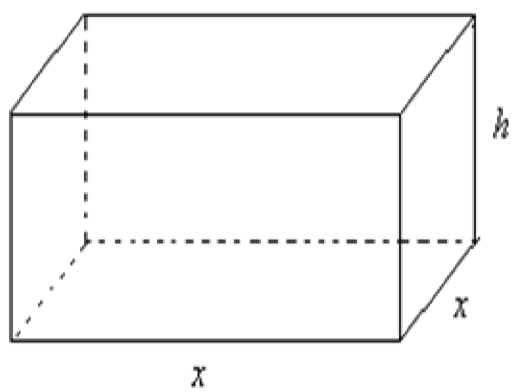
Los valores extremos se presentan en: $x = 2$ *y* $x = -2$

$$A(2) = 2(2)\sqrt{4-2^2} = 0 = A(-2)(Area\ \ cero)$$

La mayor área del rectángulo se produce cuando x=√2 y el área es de 4 unidades cuadradas.
Respuesta: De lo anterior concluimos que las dimensiones del rectángulo de mayor área son: Largo: 2√2 Alto: √2

◈ Se desea construir una caja abierta (sin cara superior) y de base cuadrada con 108 pulgadas cuadradas de material. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

Solución: Realicemos un bosquejo de la caja:



Volumen de la caja: $V = x^2 h$ (Función a maximizar)
Como esta función tiene dos variables (x,h) debemos usar los datos del problema para eliminar una de ellas.
El material usado se obtiene sumando el área de la base y el área de las cuatro caras laterales, así:
Área de la base: x^2
Área de cada cara lateral: xh
Área total de la superficie: $S = x^2 + 4xh = 108$
Hallando h en esta ecuación tenemos:

$$4xh = 108 - x^2 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}, 0 < x < \sqrt{108}$$

Sustituyendo h en la ecuación de volumen tenemos:

$$V(x) = x^2(\frac{108 - x^2}{4x}) = 27x - \frac{x^3}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0{,}3x^2 = 108, x^2 = 36, x = \pm 6$$

Solo tomamos el valor positivo de x porque se trata de una longitud
Valor crítico: x = 6
Para este valor crítico, hallemos h:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108 - 36}{24} = \frac{72}{24} = 3$$

Respuesta: las dimensiones de la caja son:
Longitud de la base: *x* = 6 pulgadas. Altura de la caja: *h* = 3 pulgadas.
Volumen de la caja: $V = x^2 h$ = 36(3) = 108 pulgadas cúbicas (Obsérvese la gráfica)

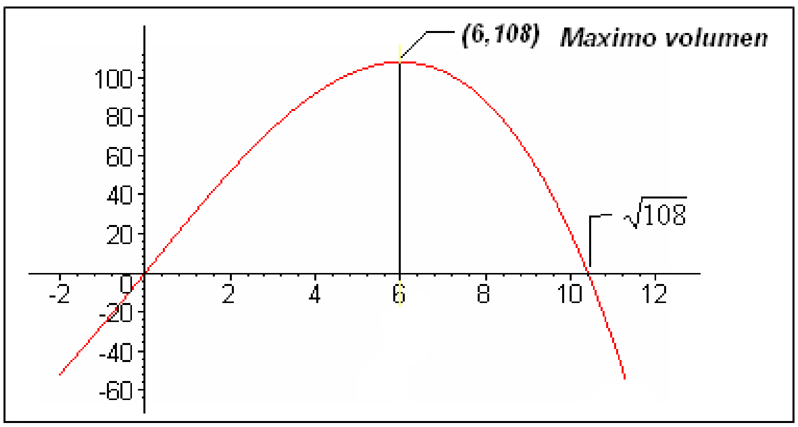


Figura 53 Apuntes Cálculo Diferencial Ing. Edgar Vargas.

Nota: Usando el criterio de la segunda derivada se puede probar que, en efecto, los valores de x, *h* corresponden al máximo volumen.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M. (ed.) (1964), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, U.S. Govt. Print. Off. (Washington DC), Reprint by Dover (New York) 1965.
- Acton, F.S. (1990), Numerical Methods that Usually Work, Mathematical Association of America (Washington DC).
- Apostol, T.M. (1969), Calculus, 2nd ed., 2 Vol., Blaisdell Pub. (Waltham, MA).
- Atkinson, K.E. (1993), Elementary Numerical Analysis, 2nd ed., John Wiley (New York).
- Demana. Pre cálculo: Gráfico, Numérico, Algebraico. México. Pearson Educación. 2007. Séptima Edición.
- Hijuelos Aguilar, Luis Alfonso. Principios básicos para el cálculo diferencial e integral. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2004.
- Larson. Cálculo I. Mc Graw Hill. 2005. Décima edición.
- Los Caminos del Saber Matemáticas 11. Editorial Santillana. 2013.
- Prado. Cálculo Diferencial para Ingeniería. México. Pearson Educación. 2006.
- Purcell, Edwin J. Cálculo Diferencial e integral. México: Pearson Educación. 2007. Novena Edición.
- Soler. Fundamentos de Cálculo. México. Pearson Educación. 2008.
- Stewart James, Redlin L., Watson S. Pre Cálculo Matemáticas para el cálculo. México. Thomson Paraninfo S.A. 2007.
- Vargas, Edgar. Apuntes Cálculo Diferencial. 2010.
- Zill, Dennis, Cálculo de una variable, 4 ed. Edit McGraw-Hill, México 2011